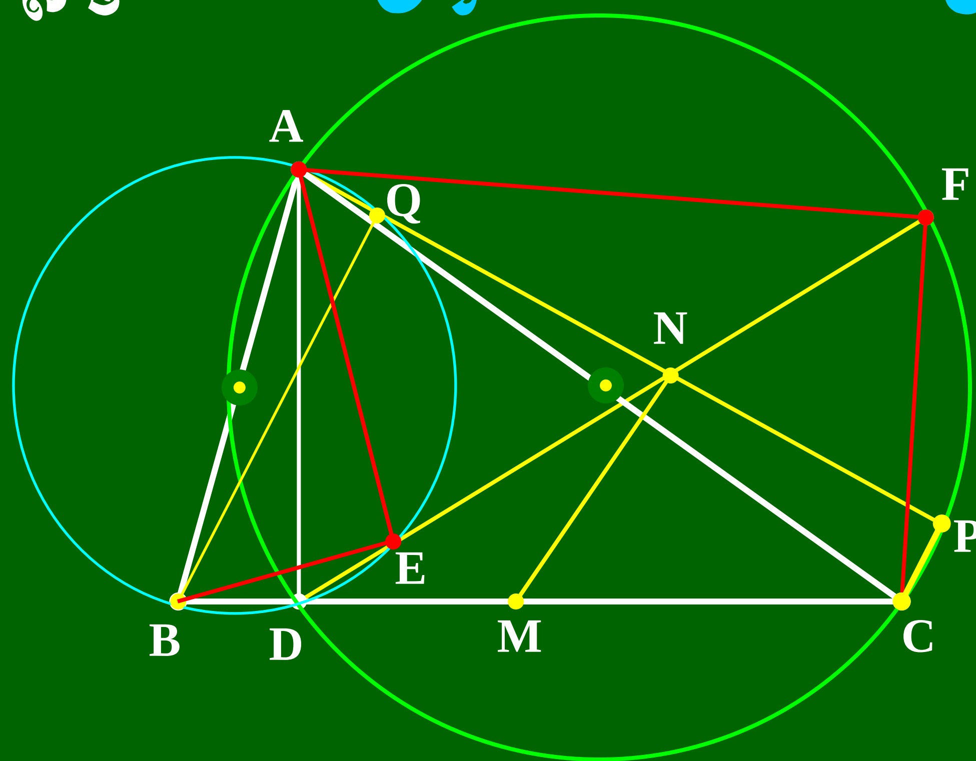
លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា

សិក្សាគណិតវិទ្យាដោយខ្លួនឯង

ធរណីមាត្រអឺគ្លីដ

សម្រាប់ សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា



គណៈកម្មការនិពន្ធនិងរៀបរៀង

លោក **លឹម ផល្គុន** និង លោក **សែន ពិសិដ្ឋ**

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ

លោក លឹម ឆុន

លោក ទិត្យ ម៉េង

លោក ព្រឹម សុនិត្យ

លោក លោក នន់ សុខណា

លោក អ៊ឹង សំណាង

អ្នកស្រី ទុយ រីណា

លោក ផល ប៊ុនឆាយ

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការីកុំព្យូទ័រ

កញ្ញា លី គុណ្ណាកា

អ្នករចនាក្រប

លោក លឹម ផល្គុន

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **សិក្សាគណិតវិទ្យាដោយខ្លួនឯង** ផ្នែក **ធរណីមាត្រអឺគ្លីត** ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់សិក្សានៅក្នុងដៃនេះ យើងខ្ញុំបានខិតខំស្រាវជ្រាវចងក្រងឡើងក្នុងគោលបំណងទុកជាឯកសា សិក្សាបន្ថែមលើមេរៀនចំនួនកុំផ្លិចដោយខ្លួនឯង ។ នៅក្នុងសៀវភៅនេះរួមមានបីជំពូកគឺ ជំពូកទី១ មេរៀនសង្ខេបភ្ជាប់ជាមួយឧទាហរណ៍គំរូ ជំពូកទី២ លំហាត់ជ្រើសរើសនិងដំណោះស្រាយ និង ជំពូកទី៣ ជាលំហាត់អនុវត្តន៍ ។

សៀវភៅនេះមិនល្អហួសគេ ហួសឯងនោះទេ កំហុសដោយអចេតនាប្រាកដជាមាន អាស្រ័យហេតុនេះ យើងខ្ញុំជាអ្នកនិពន្ធ និង រៀបរៀង រងចាំជានិច្ចនូវមតិរិះគន់ពីសំណាក់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដោយក្តីរីករាយ ដើម្បីកែលំអសៀវភៅនេះឱ្យកាន់តែមានសុក្រិត្យភាពបន្ថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់យើងខ្ញុំសូមជូនពរចំពោះអ្នកសិក្សាទាំងអស់ជួបតែសុភមង្គល សុខភាពល្អ និងទទួលជ័យជំនះក្នុងការសិក្សា និង មុខរបរការងារ គ្រប់ពេលវេលា ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ៣០ មីនា ២០១១

អ្នកនិពន្ធ លឹម ផល្គុន

Tel : 017 768 246

www.mathtoday.wordpres.com

លឹម ផល្លុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

សិក្សាគណិតវិទ្យាដោយខ្លួនឯង

ធរណីមាត្រអឺគ្លីត

ជំពូកទី១

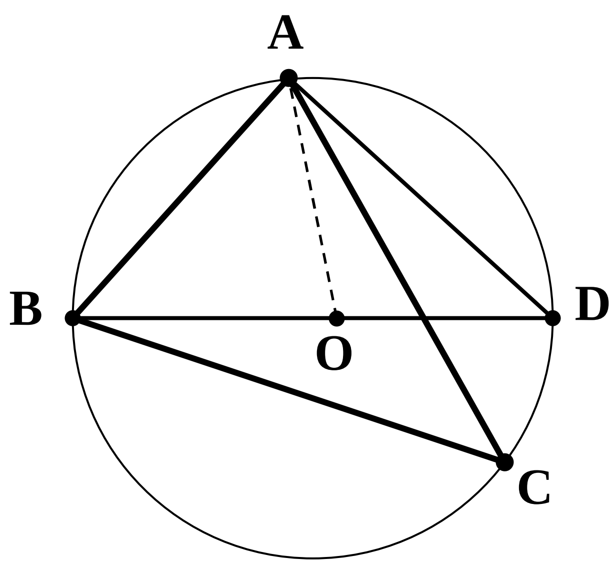
ទ្រឹស្តីបទសំខាន់ៗ

១-ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស (The law of sines)

ចំពោះត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មានជ្រុង $\mathbf{BC = a}$, $\mathbf{AC = b}$, $\mathbf{AB = c}$

ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត $\mathbf{O}$ កាំ $\mathbf{R}$ គេបាន $\mathbf{\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



សង់អង្កត់ផ្ចិត $\mathbf{BD = 2R}$ នោះគេបាន $\mathbf{\angle BAD = 90^o}$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

ក្នុងត្រីកោណកែង $\mathbf{ABD}$ គេមាន $\mathbf{\sin D = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{c}{2R}}$

ដោយ $\mathbf{\angle ADB = \angle ACB}$ (មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ដោយធ្នូររួម $\mathbf{AB}$)

គេបាន $\sin C = \frac{c}{2R}$ ឬ $\frac{c}{\sin C} = 2R$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $\frac{a}{\sin A} = 2R$ និង $\frac{b}{\sin B} = 2R$

ដូចនេះ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ។

ទ្រឹស្តីបទនេះពិតជានិច្ចចំពោះមុំ **A , B , C** ជាមុំស្រួច ឬ មុំកែង ឬ មុំទាល ។

២-រូបមន្តចំណោលកែង (Projection Formula)

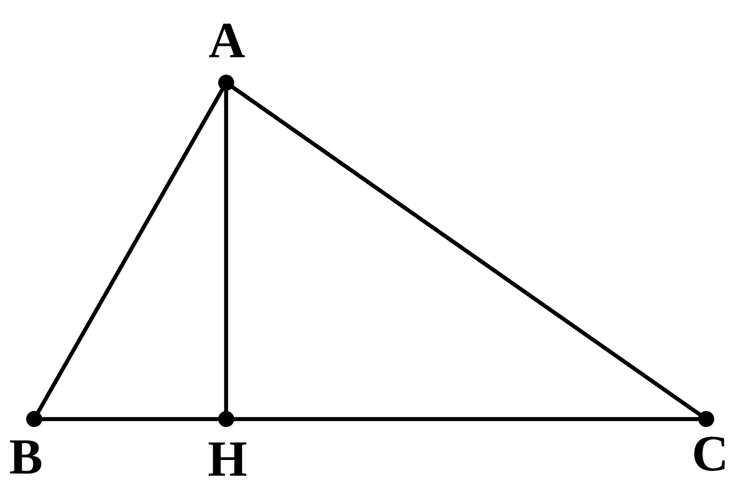
ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ **ABC** គេមាន :

$$a = b\cos C + c\cos B$$

$$b = c\cos A + a\cos C$$

$$c = a\cos B + b\cos A$$

សម្រាយបញ្ជាក់



សង់កម្ពស់ **AH** នៃត្រីកោណ **ABC** ។

គេមាន $BC = BH + HC$

ក្នុងត្រីកោណកែង ABH និង AHC គេមាន :

$\cos B = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{BH}{c}$ នោះ $BH = c\cos B$

$\cos C = \dfrac{HC}{AC} = \dfrac{HC}{b}$ នោះ $HC = b\cos C$

ហេតុនេះ $BC = c\cos B + b\cos C$ ដោយ $BC = a$

ដូចនេះ $a = b\cos C + c\cos B$ ។

ចំពោះរូបមន្តពីរទៀតស្រាយដូចរបៀបខាងលើនេះដែរ ។

៣~ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC គេមាន :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមរូបមន្តចំណោលកែងគេមាន :

$$\begin{cases} a = b\cos C + c\cos B \\ b = c\cos A + a\cos C \\ c = a\cos B + b\cos A \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} a^2 = ab\cos C + ac\cos B \\ -b^2 = -bc\cos A - ab\cos C \\ -c^2 = -ac\cos B - bc\cos A \end{cases}$$

ធ្វើផលបូកសមីការពីរនេះអង្គ និង អង្គគេបាន :

$\mathbf{a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos A}$ ឬ $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$

ចំពោះរូបមន្តពីរទៀតស្រាយដូចគ្នាខាងលើដែរ ។

៤~ទ្រឹស្តីបទមេដ្យាន

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ **ABC** ដែលមានជ្រុង $\mathbf{a, b, c}$ និងមេដ្យានត្រូវគ្នា

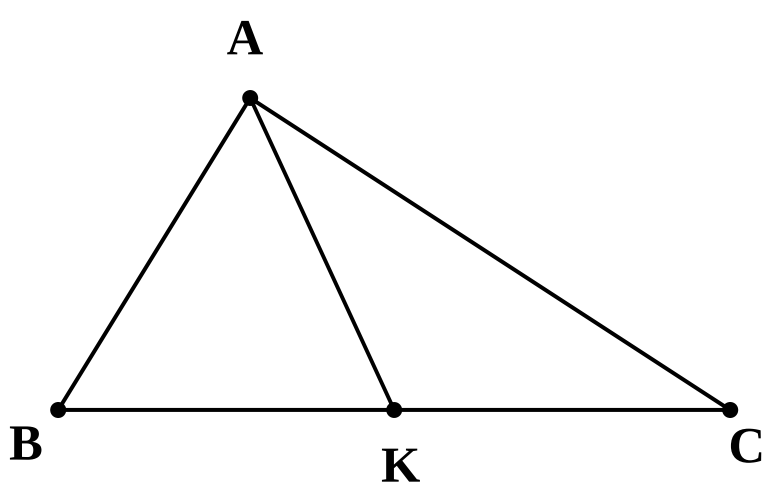
$\mathbf{m_a, m_b, m_c}$ គេមាន :

$$\mathbf{m_a}^2 = \frac{\mathbf{b^2 + c^2}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{a^2}}{\mathbf{4}}$$

$$\mathbf{m_b}^2 = \frac{\mathbf{c^2 + a^2}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{b^2}}{\mathbf{4}}$$

$$\mathbf{m_c}^2 = \frac{\mathbf{a^2 + b^2}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{c^2}}{\mathbf{4}}$$

សម្រាយបញ្ជាក់



សង់មេដ្យាន $\mathbf{AK = m_a}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ **ABK**

$$AK^2 = AB^2 + BK^2 - 2AB.BK\cos B$$

ឬ $m_a{}^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - 2c.\frac{a}{2}\cos B = c^2 + \frac{a^2}{4} - ac\cos B \quad (1)$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ **AKC**

$$AK^2 = AC^2 + KC^2 - 2AC.KC\cos C$$

ឬ $m_b{}^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} - 2b.\frac{a}{2}\cos C = b^2 + \frac{a^2}{4} - ab\cos C \quad (2)$

បូកសមីការ $(1)\,\&\,(2)$ គេបាន :

$$2m_a{}^2 = b^2 + c^2 + \frac{a^2}{2} - a(c\cos B + b\cos C)$$

តែ $c\cos B + b\cos C = a$ (រូបមន្តចំណោលកែង)

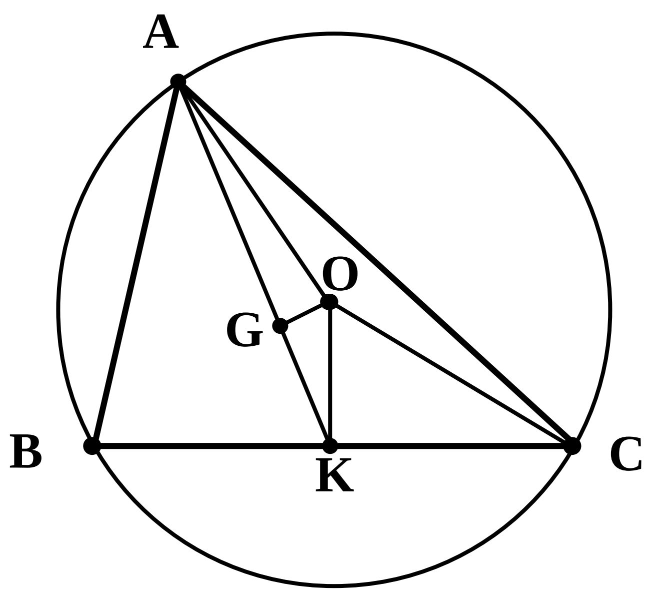
នោះ $m_a{}^2 = b^2 + c^2 + \frac{a^2}{2} - a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$

ដូចនេះ $m_a{}^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ ។

៤~ទ្រឹស្តីបទឡៃបនិច (Leibniz's theorem)

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ **ABC** ដែលមានជ្រុង a, b, c ហើយ **O** ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង **G** ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណនោះគេមាន $OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



សង់ដ្យាន $\mathbf{AK}$ និង $\mathbf{BL}$ កាត់គ្នាត្រង់ $\mathbf{G}$ ។

តាង $\angle\mathbf{OGA} = \varphi$ នោះ $\angle\mathbf{OGK} = \pi - \varphi$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{OGA}$:

$$\mathbf{OA^2 = OG^2 + GA^2 - 2OG.GA\cos\alpha}$$

គេទាញ $\mathbf{\cos\alpha = \dfrac{OG^2 + GA^2 - OA^2}{2OG.GA}}$ **(1)**

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{OGK}$:

$$\mathbf{OK^2 = OG^2 + GK^2 - 2OG.GK\cos(\pi - \alpha)}$$

$$\mathbf{OK^2 = OG^2 + GK^2 + 2OG.GK\cos\alpha}$$

គេទាញបាន $\cos\alpha = \frac{OK^2 - GK^2 - OG^2}{2OG.GK}$ (2)

ផ្ទឹម (1) និង (2) គេបាន :

$$\frac{OG^2 + GA^2 - OA^2}{2OG.GA} = \frac{OK^2 - GK^2 - OG^2}{2OG.GK}$$

$$OG^2 + GA^2 - OA^2 = \frac{GA}{GK}(OK^2 - GK^2 - OG^2)$$

ដោយគេមាន $OA = R$, $GA = \frac{2}{3}AK = \frac{2}{3}m_a$, $GK = \frac{1}{3}AK = \frac{1}{3}m_a$

ក្នុងត្រីកោណកែង OCK : $OK^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$ (ពីតាគ័រ)

គេបាន $OG^2 + \frac{4}{9}m_a{}^2 - R^2 = 2(R^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{1}{9}m_a{}^2 - OG^2)$

ឬ $3OG^2 = 3R^2 - \frac{2}{3}m_a{}^2 - \frac{a^2}{2}$

តាមទ្រឹស្តីបទមេដ្យាន $m_a{}^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$

ហេតុនេះ $3OG^2 = 3R^2 - \frac{2}{3}(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}) - \frac{a^2}{2}$

$$3OG^2 = 3R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

ដូចនេះ $OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$ ។

៥. ទ្រឹស្តីបទ Stewart (Stewart's Theorem)

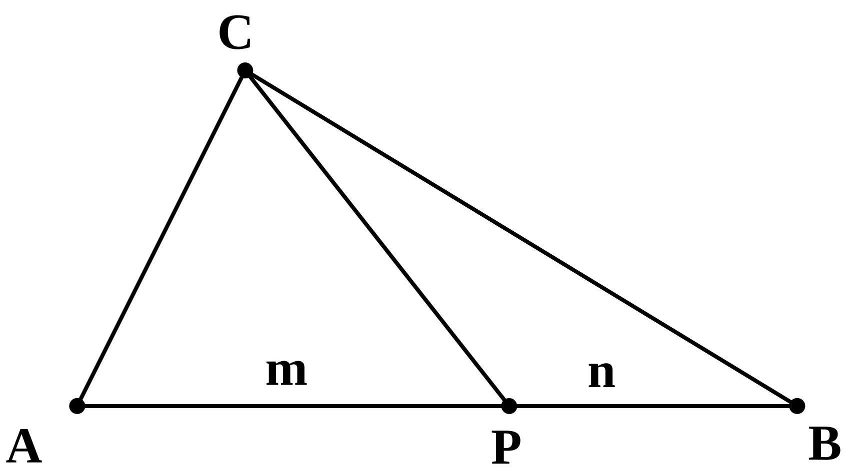
គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ ។

$\mathbf{P}$ ជាចំណុចមួយនៃ $\mathbf{AB}$ ដែល $\mathbf{PA=m}$, $\mathbf{PB=n}$ និង $\mathbf{m+n=c}$ ។

គេបាន $\mathbf{ma^2+nb^2=(m+n).PC^2+mn^2+nm^2}$ ។

សម្គាល់គេហៅទ្រឹស្តីបទ Stewart ដូចគ្នានឹងទ្រឹស្តីបទ Apollonius (Apollonius' theorem) ។

សម្រាយបញ្ជាក់



តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសចំពោះត្រីកោណ $\mathbf{PAC}$ និង $\mathbf{PBC}$ គេមាន :

$\mathbf{AC^2=PC^2+PA^2-2PC.PA\cos\phi}$ ដែល $\mathbf{\phi=\angle APC}$

$$\mathbf{BC^2=PC^2+PB^2+2PC.PB.\cos\phi}$$

ដោយ $\mathbf{AC=b}$, $\mathbf{BC=a}$, $\mathbf{PA=m}$, $\mathbf{PB=n}$

គេបាន $b^2 = PC^2 + m^2 - 2mPC.\cos\phi$

និង $a^2 = PC^2 + n^2 + 2nPC\cos\phi$

ហេតុនេះ $nb^2 + ma^2 = (m+n)PC^2 + m^2n + mn^2$

ដូចនេះ $ma^2 + nb^2 = (m+n).PC^2 + mn^2 + nm^2$ ។

៦‐ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ

ក. ករណីស្គាល់ជ្រុង និង កម្ពស់

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ដែលមានជ្រុង a, b, c និងកម្ពស់ h_a, h_b, h_c

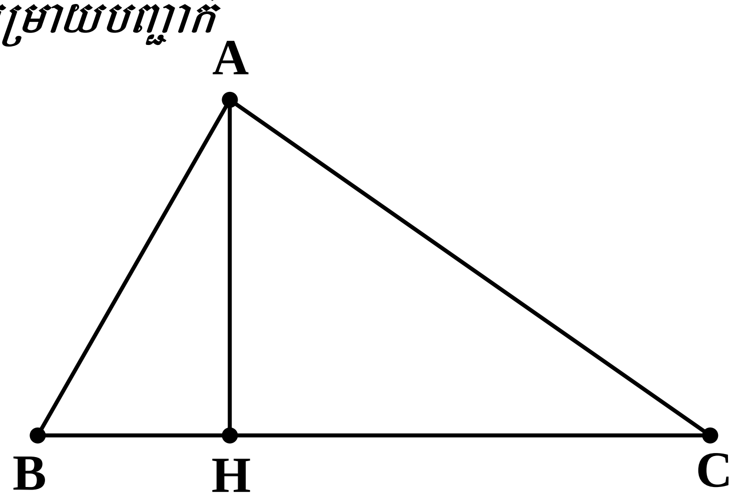
គេបានផ្ទៃក្រឡា $S = \frac{1}{2}a\,h_a = \frac{1}{2}b\,h_b = \frac{1}{2}c\,h_c$ ។

ខ. ករណីស្គាល់ជ្រុងពីរ និង មុំមួយ

ទ្រឹស្តីបទ : ផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC កំណត់ដោយ :

$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



គេមាន $S = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}\,a\,h_a$

ក្នុងត្រីកោណកែង AHC គេមាន $\sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{h_a}{b}$ ឬ $h_a = b\sin C$

ដូចនេះ $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ ។

សម្គាល់ :

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសគេមាន $\sin C = \frac{c}{2R}$ ដែល R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ

ហេតុនេះ $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ab.\frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$ ។

ដូចនេះ $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{abc}{4R}$ ។

គ.រូបមន្តហេរ៉ុង

ទ្រឹស្តីបទ : ផ្ទៃក្រឡានៃ $\Delta\ ABC$ ដោយស្គាល់ជ្រុងទាំងបី a, b, c

កំណត់ដោយ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ដែល $p = \frac{a+b+c}{2}$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមរូបបមន្ត $S = \frac{1}{2}bc\sin A \quad (1)$

គេមាន $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

ដោយ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

នោះ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

គេបាន $\sin^2 A = 1 - (\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc})^2$

$$= \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$$

តាង $p = \frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃ ΔABC

នោះគេបាន $\begin{cases} a+b+c = 2p \\ b+c-a = 2(p-a) \\ a+b-c = 2(p-c) \\ a-b+c = 2(p-b) \end{cases}$

គេបាន $\sin^2 A = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4b^2c^2}$

គេទាញ $\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (2)

យក (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន :

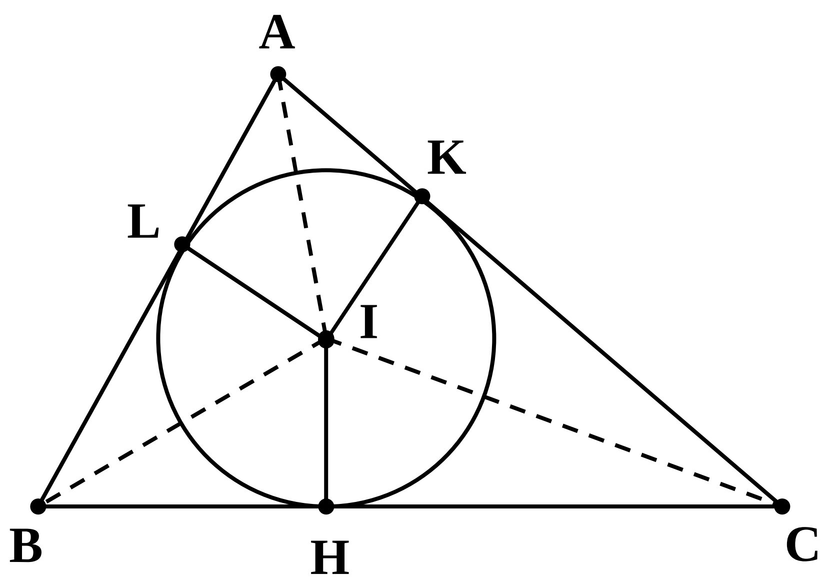
$$S = \frac{1}{2}bc \times \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ដូចនេះ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ។

ឃ. ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណជាអនុគមន៍នៃកន្លះបរិមាត្រ និង កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង

ទ្រឹស្តីបទ : ផ្ទៃក្រឡានៃ Δ **ABC** ដែលមាន **p** ជាកន្លះបរិមាត្រ និង **r** ជាកាំនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណកំណត់ដោយ $S = pr$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



តាង **I** ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ **ABC** ហើយ H, K, L ជាចំនុចប៉ះរវាងរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ជាមួយជ្រុង BC, CA, AB រៀងគ្នា ។

ផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC កំណត់ដោយ :

$$S = S_{IBC} + S_{ICA} + S_{IAB} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{a+b+c}{2}.r$$

តាង $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ នោះ $S = pr$ ។

៧~កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ ហើយតាង $\mathbf{p=\frac{a+b+c}{2}}$ ។

តាង $\mathbf{r}$ និង $\mathbf{R}$ រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ $\mathbf{\Delta ABC}$

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ **ABC** គេបាន :

$$\mathbf{S=pr=\frac{abc}{4R}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

ដូចនេះ $\mathbf{r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}$

និង $\mathbf{R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}}$ ។

៨~ទំនាក់ទំនងឆ្លុះនៃជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ ។

ប្រវែងជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ មានទំនាក់ទំនងឆ្លុះជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{r,R,p}$ ដូចខាងក្រោម :

$$\begin{cases} \mathbf{a+b+c=2p} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{ab+bc+ca=p^2+r^2+4rR} & \mathbf{(2)} \\ \mathbf{abc=4prR} & \mathbf{(3)} \end{cases}$$

បានន័យថា $\mathbf{a,b,c}$ ជាឫសនៃសមីការដឺក្រេទីបី :

$\mathbf{x^3-2px^2+(p^2+r^2+4rR)x+4prR=0}$ (តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត) ។

ចំពោះទំនាក់ទំនង **(2)** និង **(3)** អាចស្រាយបញ្ជាក់ដូចខាងក្រោម :

តាមរូបមន្ត $\mathbf{r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}$

គេបាន $\mathbf{r^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

$$\mathbf{r^2=\frac{p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc}{p}}$$

ដោយ $\mathbf{a+b+c=2p}$ ហើយ $\mathbf{S=\frac{abc}{4R}=pr}$ នោះ $\mathbf{abc=4prR}$

ហេតុនេះ $\mathbf{r^2=\frac{p^3-2p^3+(ab+bc+ca)p-4prR}{p}}$

$$\mathbf{r^2=-p^2+ab+bc+ca-4rR}$$

ដូចនេះ $\mathbf{ab+bc+ca=p^2+r^2+4rR}$ ។

សម្គាល់ :

គេមាន $\mathbf{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$

គេបាន $\mathbf{a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}$

$$\mathbf{=(2p)^2-2(p^2+r^2+4rR)}$$

$$\mathbf{=2p^2-2r^2-8rR}$$

ដូចនេះ $\mathbf{a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8rR}$ $\mathbf{(4)}$

ហើយ $\mathbf{(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ac)-abc}$

$$\mathbf{=2p(p^2+r^2+4rR)-4prR}$$

$$\mathbf{=2p(p^2+r^2+2rR)}$$

ដូចនេះ $(a+b)(b+c)(a+c)=2p(p^2+r^2+2rR)\quad(5)$

តាមសមភាព $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)$

គេបាន $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(a+c)$

$$=(2p)^3-6p(p^2+r^2+2rR)$$

$$=2p(4p^2-3p^2-3r^2-6rR)$$

$$=2p(p^2-3r^2-6rR)$$

ដូចនេះ $a^3+b^3+c^3=2(p^3-3pr^2-6prR)\quad(6)$

ឧទាហរណ៍ : ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា :

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$$ ដែល r និង R តាងរៀងគ្នា

ជារង្វាស់កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ABC ។

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៏ក្នុងត្រីកោណ ABC គេបាន :

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-2(a^3+b^3+c^3)}{2abc}$$

ដោយជំនួស : $a+b+c=2p$

ហើយ $a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8rR$

និង $a^3+b^3+c^3=2(p^3-3pr^2-6prR)$

គេបាន :

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{2p(2p^2-2r^2-8rR)-4(p^3-3pr^2-6prR)}{8prR}$$

$$=\frac{2p(2p^2-2r^2-8rR-2p^2+6r^2+12rR)}{8pRr}$$

$$=\frac{4rR+4r^2}{4rR}=1+\frac{r}{R}$$

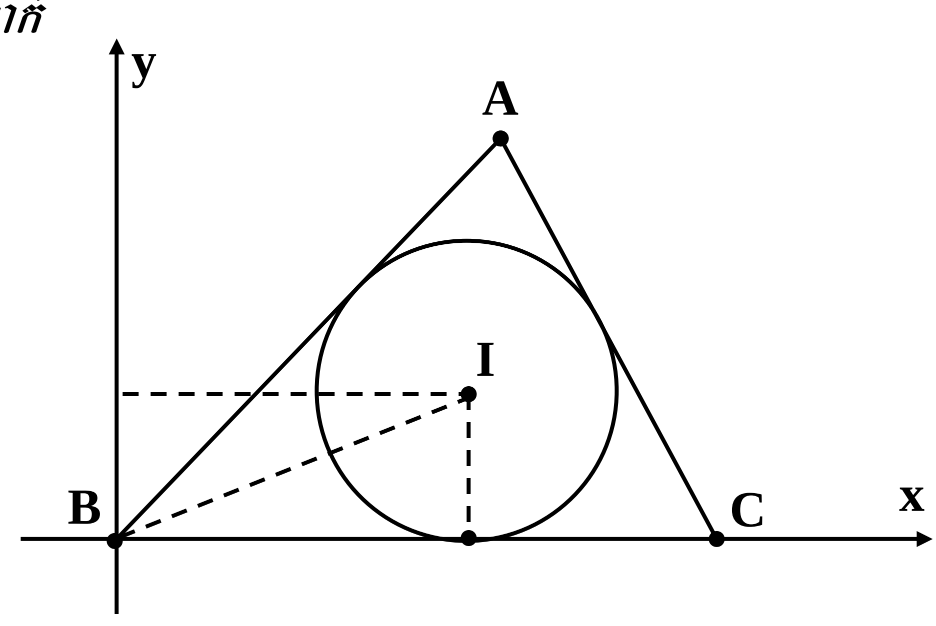
ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C=1+\dfrac{r}{R}$ ។

៩-ទ្រឹស្តីបទអឺលែ

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a, b, c ។ តាង I ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនេះ ។ ចំពោះគ្រប់ចំនុច X នៃប្លង់គេមានទំនាក់ទំនង :

$$a.XA^2+b.XB^2+c.XC^2=(a+b+c).XI^2+abc$$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ **(Bxy)** គេមាន :

$B(0;0)\ ;\ C(a\ ,\ 0\ )\ ;\ A(\ c\cos B\ ;\ c\sin B)$ ។

តាង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ

នៃត្រីកោណ **ABC** នោះគេបាន $I(\ p-b\ ;\ r\ )$ ។

បើ S ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ **ABC** នោះគេមាន :

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$ (រូបមន្តហេរ៉ុង)

លើកជាការេគេទាញបាន $r^2=\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$

តាង $X(\ x_0\ ;y_0\ )$ ជាចំនុចណាក៏ដោយនៃប្លង់ ។

តាង $M=a.XA^2+b.XB^2+c.XC^2$

និង $N=(a+b+c).XI^2+abc$ គេបាន :

$$M=aXA^2+bXB^2+cXC^2$$
$$=a[(x_0-c\cos B)^2+(y_0-c\sin B)^2]+b(x_0{}^2+y_0{}^2)+c[(x_0-a)^2+y_0{}^2]$$
$$=(a+b+c)(x_0{}^2+y_0{}^2)-2acx_0(1+\cos B)-2acy_0\sin B+ac^2+a^2c$$
$$=2p(x_0{}^2+y_0{}^2)-2acx_0(1+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac})-4y_0S+a^2c+ac^2$$
$$=2p(x_0{}^2+y_0{}^2)-x_0(2p)(2p-2b)-4y_0S+a^2c+ac^2$$
$$=2p(x_0{}^2+y_0{}^2)-4px_0(p-b)-4y_0S+a^2c+ac^2$$

ហើយ $\mathbf{N=(a+b+c)XI^2+abc}$

$$\mathbf{=2p\left[(x_0-(p-b))^2+(y_0-r)^2\right]+abc}$$

$$\mathbf{=2p(x_0{}^2+y_0{}^2)-4x_0p(p-b)-4y_0pr+2p(p-b)^2+}$$

$$\mathbf{+2pr^2+abc}$$

$$\mathbf{=2p(x_0{}^2+y_0{}^2)-4px_0(p-b)-4y_0S+2p(p-b)^2+}$$

$$\mathbf{+2p\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}+abc}$$

$$\mathbf{=2p(x_0{}^2+y_0{}^2)-4px_0(p-b)-4y_0S+2p(p-b)^2+}$$

$$\mathbf{+2(p-a)(p-b)(p-c)+abc}$$

យក $\mathbf{T=2p(p-b)^2+2(p-a)(p-b)(p-c)+abc}$

$$\mathbf{=2(p-b)[p^2-pb+p^2-(a+c)p+ac]+abc}$$

$$\mathbf{=2(p-b)[2p^2-(a+b+c)p+ac]+abc}$$

$$\mathbf{=2ac(p-b)+abc=ac(2p-2b+b)=ac(a+c)}$$

$$\mathbf{=a^2c+ac^2}$$

គេទាញ $\mathbf{N=2p(x_0{}^2+y_0{}^2)-4px_0(p-b)-4y_0S+a^2c+ac^2}$

ដោយកន្សោម $\mathbf{M=N}$ នាំឱ្យគេទាញបាន

$\mathbf{a.XA^2+b.XB^2+c.XC^2=(a+b+c)XI^2+abc}$ ។

១០_ចម្ងាយរវាងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ

ទ្រឹស្តីបទ

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយដែល **O** ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង **I** ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង ។ បើ **R** និង **r** ជារង្វាស់កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណនោះ គេបាន $OI^2 = R^2 - 2Rr$ ឬ $d = OI = \sqrt{R(R-2r)}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមទ្រឹស្តីបទអឺលែយើងបាន :

$$a.OA^2 + b.OB^2 + c.OC^2 = (a+b+c)OI^2 + abc$$

ដោយ $OA = OB = OC = R$ និង $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

គេបាន $2pR^2 = 2p.d^2 + abc$ នាំឱ្យ $d^2 = R^2 - \dfrac{abc}{2p}$ ដែល $d = OI$ ។

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រឡា $S = pr = \dfrac{abc}{4R}$ គេទាញ $\dfrac{abc}{2p} = 2rR$

ដូចនេះ $d^2 = R^2 - 2rR = R(R-2r)$ ឬ $d = \sqrt{R(R-2r)}$ ។

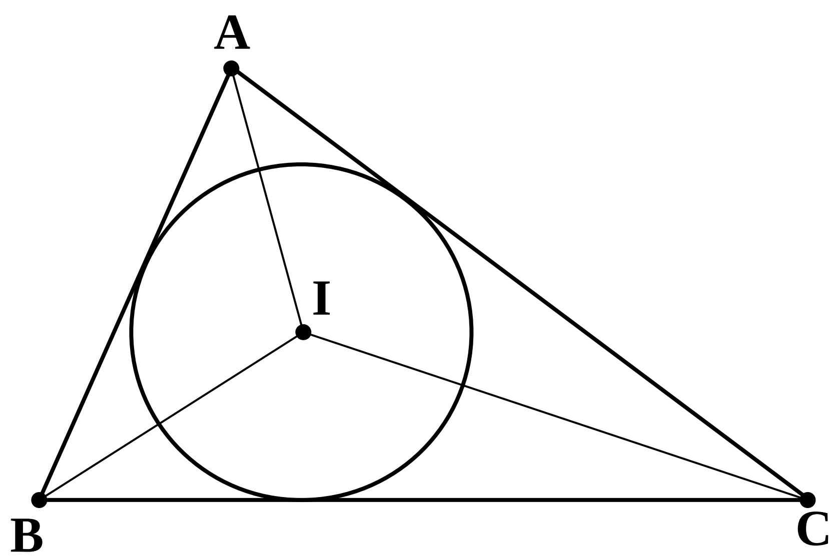
១១~ចម្ងាយពីផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងទៅកំពូលនៃត្រីកោណ

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង a,b,c ។

បើ **I** ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនោះគេបាន :

$$IA=\sqrt{\frac{p-a}{p}.bc}\ ,\ IB=\sqrt{\frac{p-b}{p}.ac}\ ,\ IC=\sqrt{\frac{p-c}{p}.ab}$$

សម្រាយបញ្ជាក់



តាមទ្រឹស្តីបទអឺលែចំពោះគ្រប់ចំនុច **X** គេមាន :

$$a.XA^2+b.XB^2+c.XC^2=(a+b+c).XI^2+abc$$

បើ $X\equiv A$ នោះគេបាន :

$$a.AA^2+b.AB^2+c.AC^2=(a+b+c).AI^2+abc$$

$$bc^2+cb^2=(a+b+c).AI^2+abc$$

គេទាញបាន $\mathbf{AI^2 = \frac{bc(b+c-a)}{a+b+c} = \frac{bc(2p-2a)}{2p}}$

ដូចនេះ $\mathbf{AI = \sqrt{\frac{p-a}{p}.bc}}$ ។ ចំពោះរូបមន្តពីរទៀតស្រាយដូចគ្នា ។

សម្គាល់ :

គេមាន $\mathbf{IA = \sqrt{\frac{p-a}{p}.bc}}$, $\mathbf{IB = \sqrt{\frac{p-b}{p}.ac}}$, $\mathbf{IC = \sqrt{\frac{p-c}{p}.ab}}$

គេបាន $\mathbf{a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2 = abc(\frac{p-a}{p} + \frac{p-b}{p} + \frac{p-c}{p})}$

ដោយ $\mathbf{\frac{p-a}{p} + \frac{p-b}{p} + \frac{p-c}{p} = \frac{3p-(a+b+c)}{p} = \frac{3p-2p}{p} = 1}$

ដូចនេះ $\mathbf{a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2 = abc}$ ។

១២-កន្សោមត្រីកោណមាត្រ $\sin\frac{A}{2}, \cos\frac{A}{2}, \tan\frac{A}{2}$

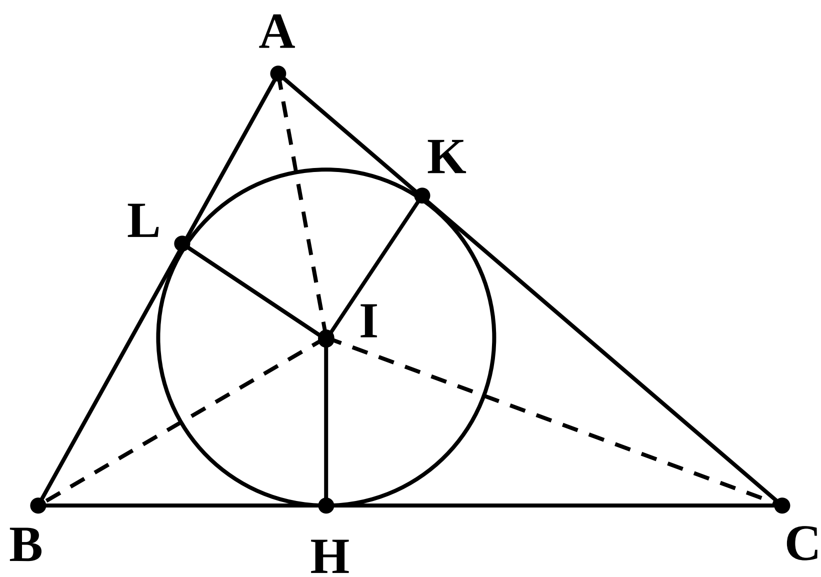
គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង $\mathbf{a, b, c}$ និងកន្លះបរិមាត្រ $\mathbf{p}$ ។

គេមានទំនាក់ទំនងដូចខាងក្រោម :

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad , \quad \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-c)}}$$

សម្រាយបញ្ជាក់



ក្នុងត្រីកោណកែង **IAL** គេមាន $\sin\frac{A}{2} = \frac{IL}{IA} = \frac{r}{IA}$

ដោយ $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ និង $IA = \sqrt{\frac{p-a}{p}.bc}$

គេបាន $\sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}{\sqrt{\frac{p-a}{p}.bc}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ ។ ដូចគ្នាដែរគេមានទំនាក់ទំនង :

$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ និង $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $S=\frac{1}{2}bc\sin A=bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

គេទាញ $\cos\frac{A}{2}=\frac{S}{bc\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}$

ដូចនេះ $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ ។ ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$ និង $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$ ។

គេមាន $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបានទំនាក់ទំនង :

$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$ និង $\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$ ។

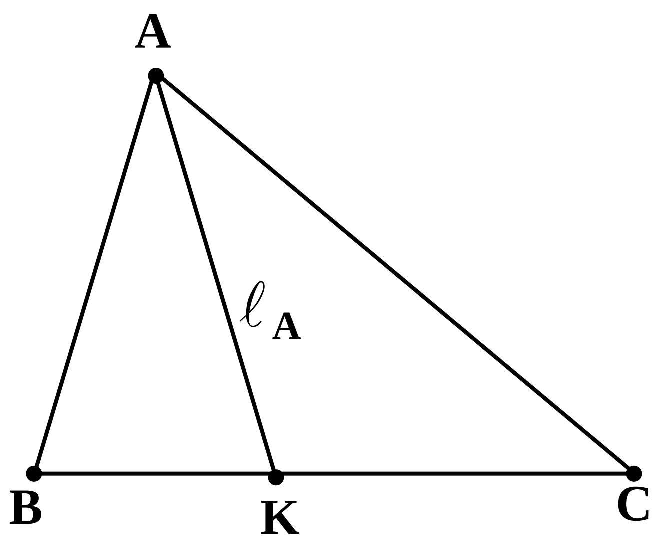
១៣~ទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំមួយរបស់ត្រីកោណ

គេឱ្យត្រីកោណ A,B,C មានជ្រុង a,b,c ។

បើ ℓ_A,ℓ_B,ℓ_C ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A,B,C នោះគេបាន :

$\ell_A=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$, $\ell_B=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}$, $\ell_C=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ **ABC** គឺ :

$$S = S_{ABK} + S_{AKC}$$

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}c\,\ell_A\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}b\,\ell_A\sin\frac{A}{2}$$

គេទាញបាន $\ell_A = \dfrac{bc\sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}$ ដោយ $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

ដូចនេះ $\ell_A = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $\ell_B = \dfrac{2ac}{a+c}\cos\dfrac{B}{2}, \ell_C = \dfrac{2ab}{a+b}\cos\dfrac{C}{2}$ ។

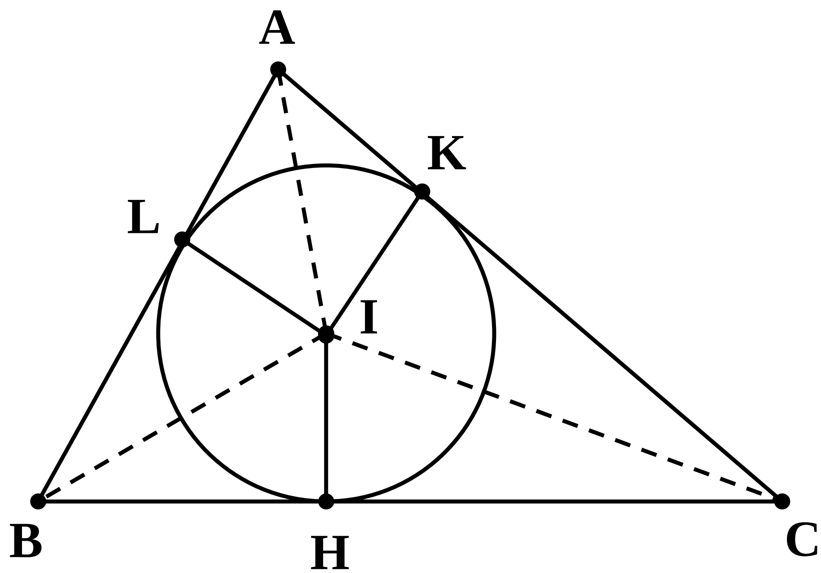
១៤~កន្សោមកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណមួយ

គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{A,B,C}$ មានជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ និងកន្លះបរិមាត្រ $\mathbf{p}$ ។

បើ $\mathbf{r}$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ នោះគេបាន :

$$\mathbf{r=(p-a)\tan\frac{A}{2}=(p-b)\tan\frac{B}{2}=(p-c)\tan\frac{C}{2}}$$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



តាង $\mathbf{AL=AK=x}$, $\mathbf{BL=BH=y}$,$\mathbf{CH=CK=z}$

គេបាន $\begin{cases}\mathbf{x+y=c}\\ \mathbf{y+z=a}\\ \mathbf{z+x=b}\end{cases}$ នាំឱ្យ $\mathbf{2(x+y+z)=a+b+c=2p}$

គេទាញ $\mathbf{x+y+z=p}$ នោះ $\begin{cases}\mathbf{x=p-(y+z)=p-a}\\ \mathbf{y=p-(z+x)=p-b}\\ \mathbf{z=p-(x+y)=p-c}\end{cases}$

ដូចនេះ $AK = AL = p - a$, $BL = BH = p - b$

និង $CH = CK = p - c$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង ALI គេមាន $\tan\frac{A}{2} = \frac{IL}{AL} = \frac{r}{p-a}$

គេបាន $r = (p-a)\tan\frac{A}{2}$ ។ ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$r = (p-b)\tan\frac{B}{2}$ និង $r = (p-c)\tan\frac{C}{2}$

ដូចនេះ $r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2}$ ។

សម្គាល់ :

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC អាចគណនាតាមរូបមន្ត :

$$S = pr = p(p-a)\tan\frac{A}{2} = p(p-b)\tan\frac{B}{2} = p(p-c)\tan\frac{C}{2}$$ ។

១៥~កន្សោមកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំមួយនៃត្រីកោណ

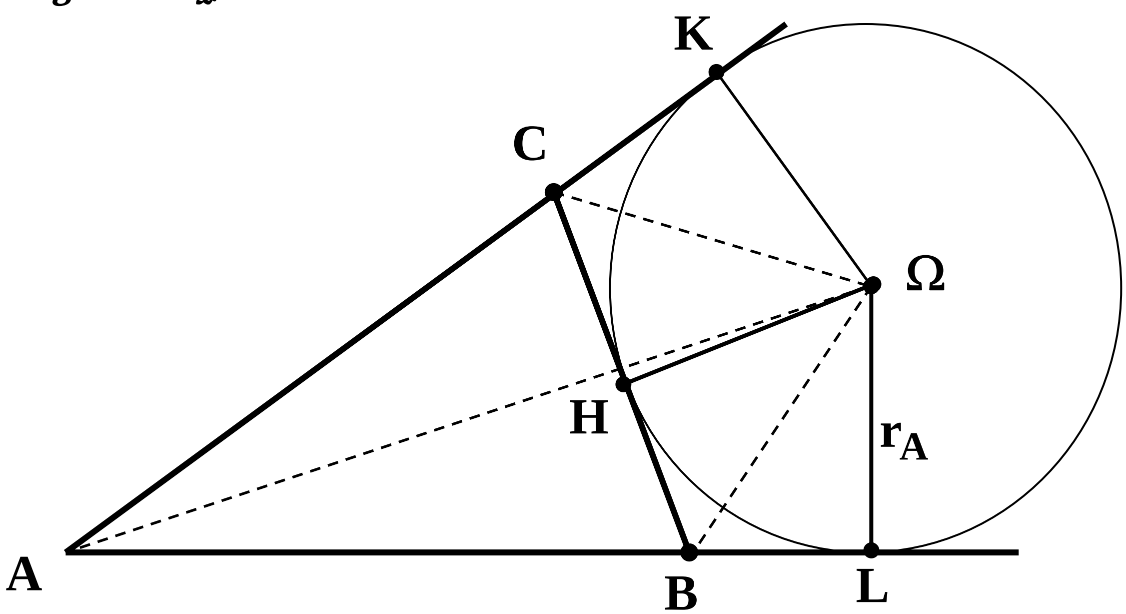
ទ្រឹស្តីបទ :

គេឱ្យត្រីកោណ A, B, C មានជ្រុង a, b, c និងកន្លះបរិមាត្រ p ។

បើ r_A ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំ A នៃត្រីកោណ ABC នោះគេបាន :

$$r_A = p\tan\frac{A}{2} = \frac{p-c}{\tan\frac{B}{2}} = \frac{p-b}{\tan\frac{C}{2}}$$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



គេមាន $AK = AC + CK = AC + CH$ និង $AL = AB + BL = AB + BH$

គេបាន :

$$AK + AL = AC + AB + (CH + BH) = AC + AB + BC = 2p$$

ដោយ $AK = AL$ នោះគេបាន $2AK = 2AL = 2p$ ឬ $AK = AL = p$

ហើយ $CK = CH = AK - AC = p - b$ និង $BH = BL = p - c$

ដូចនេះ $AK = AL = p\ , CK = CH = p - b , BH = BL = p - c$

ក្នុងត្រីកោណកែង $AL\Omega$ គេមាន $\tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{\Omega L}{AL} = \dfrac{r_A}{p}$

គេបាន $r_A = p\tan\dfrac{A}{2}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\mathbf{B=\pi-\angle LBH}$

នាំឱ្យ $\mathbf{\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\angle LBH}{2}=\frac{\pi}{2}-\angle \Omega BH}$

គេបាន $\mathbf{\tan\frac{B}{2}=\cot\angle\Omega BH=\frac{BH}{\Omega H}=\frac{p-c}{r_A}}$ គេទាញ $\mathbf{r_A=\frac{p-c}{\tan\frac{B}{2}}}$ **(2)**

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $\mathbf{r_A=\frac{p-b}{\tan\frac{C}{2}}}$ **(3)**

តាមទំនាក់ទំនង **(1),(2)** និង **(3)** គេបាន :

$$\mathbf{r_A=p\tan\frac{A}{2}=\frac{p-c}{\tan\frac{B}{2}}=\frac{p-b}{\tan\frac{C}{2}}}$$ ។

គេមានទំនាក់ទំនងស្រដៀងគ្នានេះដែរចំពោះកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំ **B** និង ក្នុងមុំ **C**

$$\mathbf{r_B=p\tan\frac{B}{2}=\frac{p-c}{\tan\frac{A}{2}}=\frac{p-a}{\tan\frac{C}{2}}\ ,\ r_C=p\tan\frac{C}{2}=\frac{p-b}{\tan\frac{A}{2}}=\frac{p-a}{\tan\frac{C}{2}}}$$

សម្គាល់ :

គេមាន $\mathbf{rr_Ar_Br_C=(p-a)\tan\frac{A}{2}.\frac{p-c}{\tan\frac{B}{2}}.p\tan\frac{B}{2}.\frac{p-b}{\tan\frac{A}{2}}}$

$$\mathbf{rr_Ar_{BC}=p(p-a)(p-b)(p-c)=S^2}$$

ដូចនេះគេបាន $\mathbf{S=\sqrt{r\,r_A\,r_B\,r_C}}$ ។

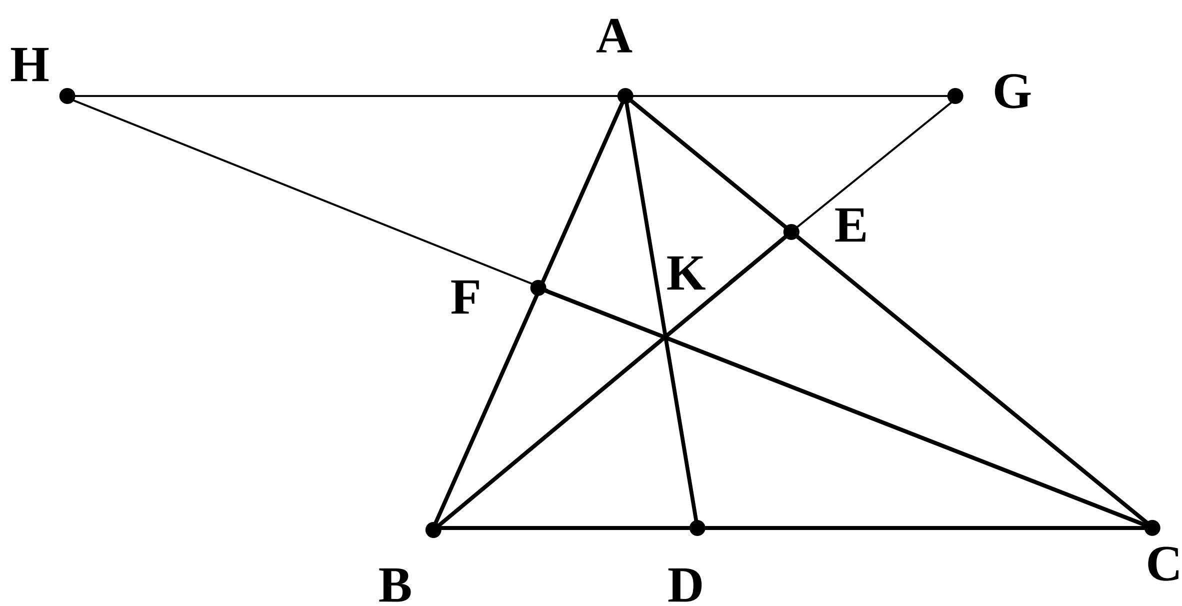
១៦-ទ្រឹស្តីបទសេវ៉ា (Ceva's theorem)

ទ្រឹស្តីបទ :

ក្នុងត្រីកោណ **ABC** មួយ បន្ទាត់បី **AD , BE** និង **CF** ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុច **K** មួយលុះត្រាតែ $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

☞ ឧបមាថាបន្ទាត់បី **AD , BE** និង **CF** ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុច**K** មួយ



យក **(Δ)** ជាបន្ទាត់កាត់តាម **A** ហើយស្របនឹង **(BC)** ។

តាង **G** និង **H** ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ **(BE)** និង **(CF)** ជាមួយបន្ទាត់ **(Δ)** រៀងគ្នា ។

ដោយ ΔAHF ដូច ΔBCF នោះគេបាន $\frac{AF}{FB}=\frac{AH}{BC}$ (1)

ΔAEG ដូច ΔBCE នោះគេបាន $\frac{CE}{EA}=\frac{BC}{AG}$ (2)

ΔAGK ដូច ΔBDK នោះគេបាន $\frac{AG}{BD}=\frac{AK}{DK}$ (3)

ΔAHK ដូច ΔCDK នោះគេបាន $\frac{AH}{DC}=\frac{AK}{DK}$ (4)

តាម $(3)\,\&\,(4)$ គេបាន $\frac{AC}{BD}=\frac{AH}{DC}$ ឬ $\frac{BD}{DC}=\frac{AG}{AH}$ (5)

គុណទំនាក់ទំនង $(1),(2)\,\&\,(5)$ អង្គ និង អង្គគេបាន :

$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AH}{BC}\cdot\frac{BC}{AG}\cdot\frac{AG}{AH}=1$ ពិត ។

☞ ឧបមាថា $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$ ពិត ។

យើងនឹងស្រាយថាបន្ទាត់ AD , BE និង CF ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុច K មួយ ។

សន្មតថា k ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ BE និង CF ហើយយក D' ជាប្រសព្វរវាង បន្ទាត់ AK និង BC ។ នោះតាមសម្រាយខាងលើគេបាន :

$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CE}{EA}=1$ តែតាមការឧបមា $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$

នោះគេបាន $\frac{BD'}{D'C}=\frac{BD}{DC}$ ឬ $\frac{BD'}{D'C}+1=\frac{BD}{DC}+1$

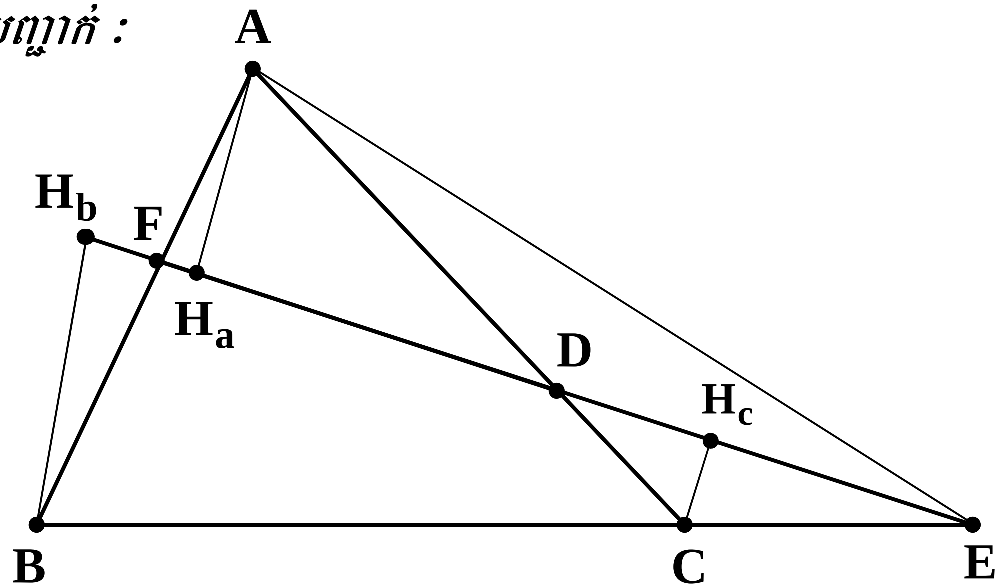
ឬ $\frac{BD'+D'C}{D'C}=\frac{BD+DC}{DC}$ ឬ $\frac{BC}{D'C}=\frac{BC}{DC}$ នោះ $D'C=DC$ មានន័យថា ចំណុច D' និង D ត្រួតស៊ីគ្នា ។

១៧~ទ្រឹស្តីបទមឺនីឡូស (Menelaus theorem)

ទ្រឹស្តីបទ :

យកបីចំនុច $\mathbf{F,D}$ និង $\mathbf{E}$ ស្ថិតរៀងគ្នាលើជ្រុង $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BC}$ និង $\mathbf{AC}$ នៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ នោះចំណុចបីនេះរត់ត្រង់គ្នាបើ $\frac{\mathbf{AF}}{\mathbf{BF}}.\frac{\mathbf{BD}}{\mathbf{CD}}.\frac{\mathbf{CE}}{\mathbf{AE}}=\mathbf{1}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ :



តាង $\mathbf{H_a ,H_b ,H_c}$ ជាចំណោលកែងនៃ $\mathbf{A,B,C}$ លើ $\mathbf{(EF)}$ រៀងគ្នា ។

នោះគេបាន $\Delta\perp\mathbf{AH_aF}$ ដូច $\Delta\perp\mathbf{BH_bF}$ នោះ $\frac{\mathbf{AF}}{\mathbf{BF}}=\frac{\mathbf{AH_a}}{\mathbf{BH_b}}$ **(1)**

$\Delta\perp\mathbf{BH_bD}$ ដូច $\Delta\perp\mathbf{CH_cD}$ នោះ $\frac{\mathbf{BD}}{\mathbf{CD}}=\frac{\mathbf{BH_b}}{\mathbf{CH_c}}$ **(2)**

$\Delta\perp\mathbf{AH_aE}$ ដូច $\Delta\perp\mathbf{CH_cE}$ នោះ $\frac{\mathbf{CE}}{\mathbf{AE}}=\frac{\mathbf{CH_c}}{\mathbf{AH_a}}$ **(3)**

គុណសមីការ **(1),(2) & (3)** គេបាន $\frac{\mathbf{AF}}{\mathbf{BF}}.\frac{\mathbf{BD}}{\mathbf{CD}}.\frac{\mathbf{CE}}{\mathbf{AE}}=\mathbf{1}$ ។

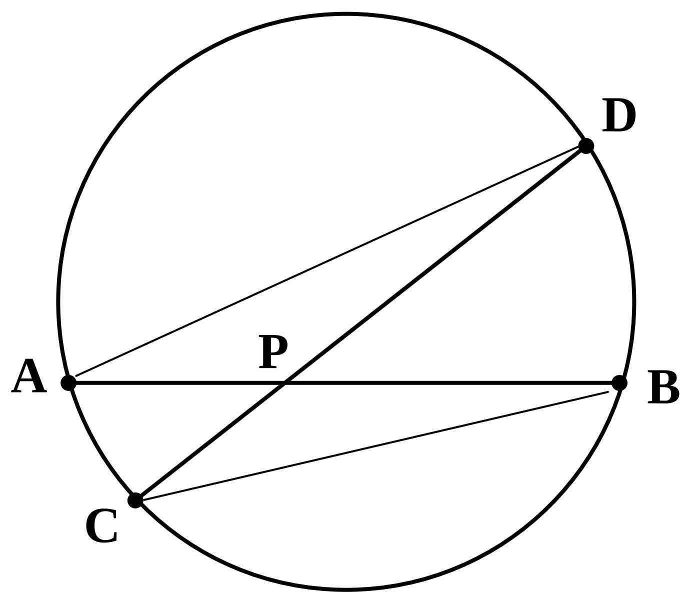
១៨-ស្វ័យគុណនៃចំនុចមួយធៀបនឹងរង្វង់មួយ

ទ្រឹស្តីបទ :

បើបន្ទាត់ពីរគូសចេញពីចំនុច $\mathbf{P}$ មួយកាត់រង្វង់ត្រង់ $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ និង $\mathbf{C},\mathbf{D}$ រៀងគ្នា នោះគេបាន $\mathbf{PA\times PB = PC\times PD}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ :

☞ ករណីចំនុច $\mathbf{P}$ នៅក្នុងរង្វង់



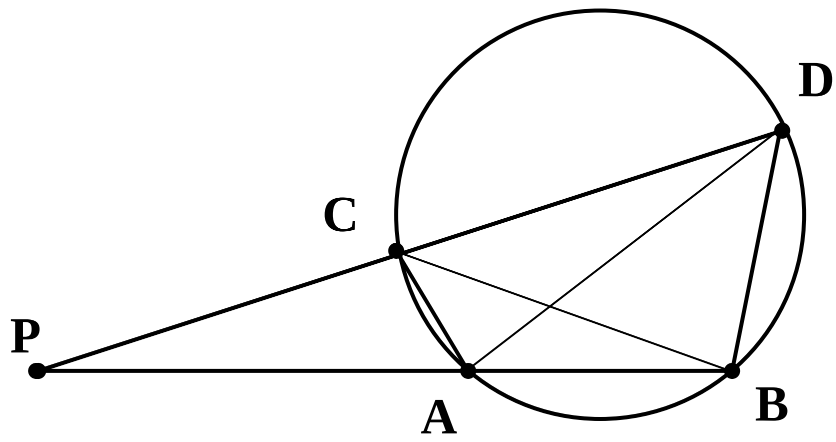
គេមាន $\angle\mathbf{PAD} = \angle\mathbf{PCB}$ (មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ដោយធ្នូរួម $\mathbf{DB}$)

$\angle\mathbf{APD} = \angle\mathbf{CPB}$ (មុំទល់កំពូល)

គេបាន $\Delta\mathbf{PAD}$ និង $\Delta\mathbf{PCB}$ ជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

គេបានផលធៀបដំណូច $\dfrac{\mathbf{PA}}{\mathbf{PC}} = \dfrac{\mathbf{PD}}{\mathbf{PB}}$ នោះ $\mathbf{PA\times PB = PC\times PD}$ ។

☞ ករណីចំនុច **P** នៅក្រៅរង្វង់



គេមាន $\angle ADC = \angle ABC$ (មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ធ្នូររួម **AC**)

$\angle APD = \angle BPC$ (មុំរួម)

គេបាន ΔPAD និង ΔPCB ជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

គេបានផលធៀបដំណូច $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$ នោះ $PA \times PB = PC \times PD$ ។

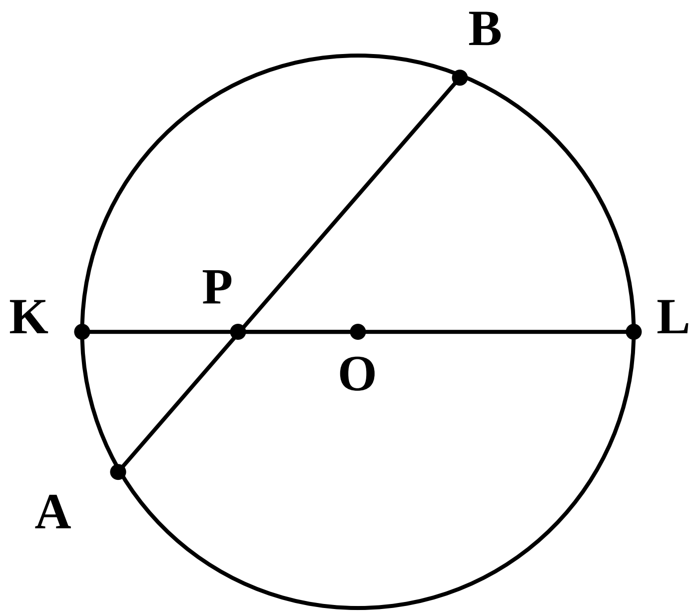
សម្គាល់ :

តាង **R** ជាកាំរង្វង់ ហើយ **d** ជាចម្ងាយពីផ្ចិតនៃរង្វង់ទៅចំនុច **P** ។

-បើ **P** នៅក្នុងរង្វង់នោះ $PA \times PB = PC \times PD = R^2 - d^2$

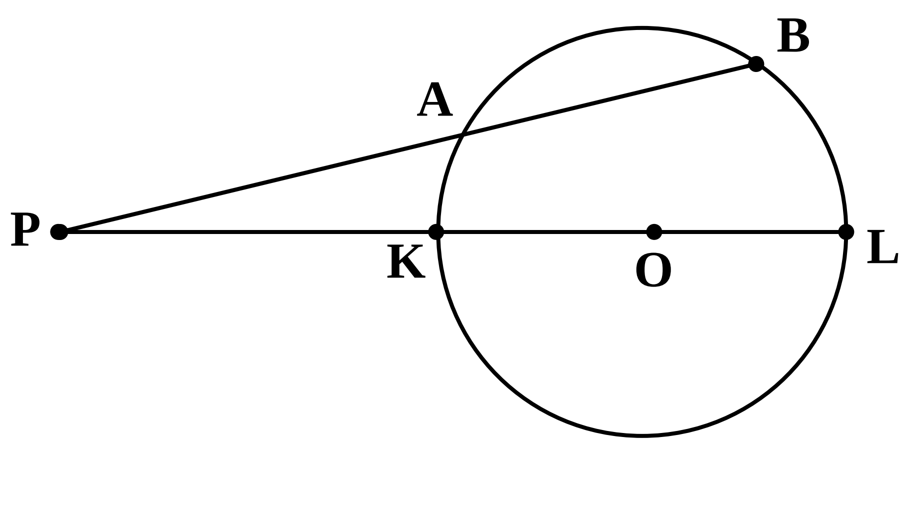
-បើ **P** នៅក្រៅរង្វង់នោះ $PA \times PB = PC \times PD = d^2 - R^2$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



ករណី **P** នៅក្នុងរង្វង់ ហើយយក **KL** ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់កាត់តាម **P**

គេបាន $\mathbf{PA.PB = PK.PL = (R-d)(R+d) = R^2 - d^2}$ ។



ករណី **P** នៅក្រៅរង្វង់ ហើយយក **KL** ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់កាត់តាម **P**

គេបាន $\mathbf{PA.PB = PK.PL = (d-R)(d+R) = d^2 - R^2}$ ។

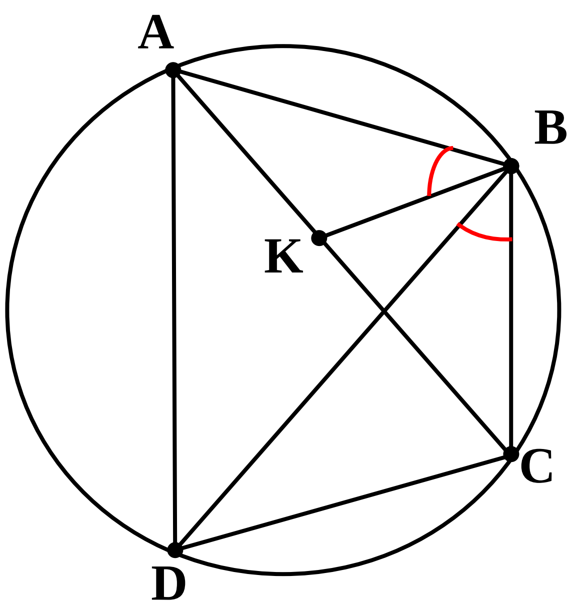
១៩-ទ្រឹស្តីបទតូលេមី (Ptolemy's theorem)

ទ្រឹស្តីបទ :

បើ **ABCD** ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់នោះគេបាន :

$\mathbf{AC.BD = AB.CD + BC.AD}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



យក **K** ជាចំនុចមួយនៃ **AC** ដែល $\angle ABK = \angle CBD$

គេមានមុំចារឹកក្នុង $\angle BAC = \angle BDC$ និង $\angle ADB = \angle ACB$

គេបាន $\angle ABD = \angle ABK + \angle KBD = \angle DBC + \angle KBD = \angle KBC$

នោះ ΔABK ដូចត្រីកោណ ΔDBC ហើយ ΔABD ដូចត្រីកោណ ΔKBC

គេបានផលធៀបដំណូច $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{CD}{BD}$ និង $\dfrac{CK}{BC} = \dfrac{DA}{BD}$

គេទាញ $AK.BD = AB.CD$ និង $CK.BD = BC.AD$

ហេតុនេះ $AK.BD + CK.BD = AB.CD + BC.AD$

$$BD(AK + CK) = AB.CD + BC.AD$$

ដោយ $AK + CK = AC$

ដូចនេះ $AC.BD = AB.CD + BC.AD$ ។

២០.វិសមភាពតូលេមី (Ptolemy's inequality)

ទ្រឹស្តីបទ :

គេឱ្យចតុកោណ **ABCD** នោះគេបាន :

$$AB.CD + BC.AD \geq AC.BD$$

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែចតុកោណ **ABCD** ចារឹកក្នុងរង្វង់ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យក z_A , z_B , z_C , z_D ជាអាហ្វិកនៃចំនុច A , B , C , D រៀងគ្នា ។

គេមានសមភាព

$$(z_B - z_A)(z_D - z_C) + (z_C - z_B)(z_D - z_A) = (z_C - z_A)(z_D - z_B)$$

តាមវិសមភាពត្រីកោណគេបាន :

$$| z_c - z_A)(z_D - z_B) | \leq | (z_B - z_A)(z_D - z_C) | + | (z_C - z_B)(z_D - z_A) |$$

ដូចនេះ $AC.BD \leq AB.CD + BC.AD$ ។

២១-ផ្ទៃក្រឡាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

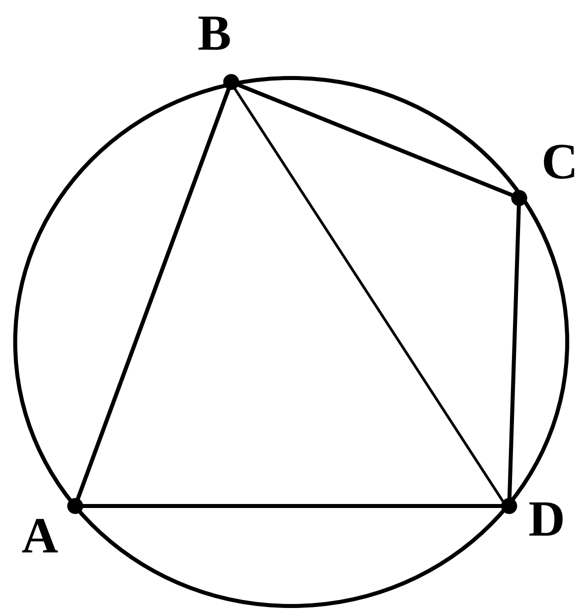
រូបមន្ត Brahmagupta :(Brahmagupta's formula)

គេឱ្យចតុកោណ **ABCD** មានជ្រុង **a , b , c , d** និងកន្លះបរិមាត្រ **p**

ចារឹកក្នុងរង្វង់នោះផ្ទៃក្រឡាវាកំណត់ដោយ :

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



ដោយ $A+C=180^{0}$ នោះគេបាន $\sin C=\sin A$ និង $\cos C=-\cos A$

គេមាន $S=S_{ABD}+S_{BCD}=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C$

$$S=\frac{1}{2}(ad+bc)\sin A \quad \text{នោះ } \sin A=\frac{2S}{ad+bc} \quad (1)$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ **ABD** និង **BCD**

គេបាន $BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$

គេទាញបាន $\cos A = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} \quad (2)$

ហើយគេមាន $\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \quad (3)$

តាម $(1), (2) \;\&\; (3)$ គេបាន :

$$\frac{4S^2}{(ad+bc)^2} + \frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4(ad+bc)^2} = 1$$

គេទាញ $S^2 = \dfrac{4(ad+bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{16} = \dfrac{\alpha\beta}{16}$

ដែល $\alpha = 2(ad + bc) + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)$

$$= (a + d)^2 - (b - c)^2$$

$$= (a + d + b - c)(a + d - b + c)$$

និង $\beta = 2(ad + bc) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)$

$$= (b + c)^2 - (a - d)^2$$

$$= (b + c + a - d)(b + c - a + d)$$

ដោយ $a + b + c + d = 2p$

នោះ $\alpha = 4(p - b)(p - c)$ និង $\beta = 4(p - a)(p - d)$

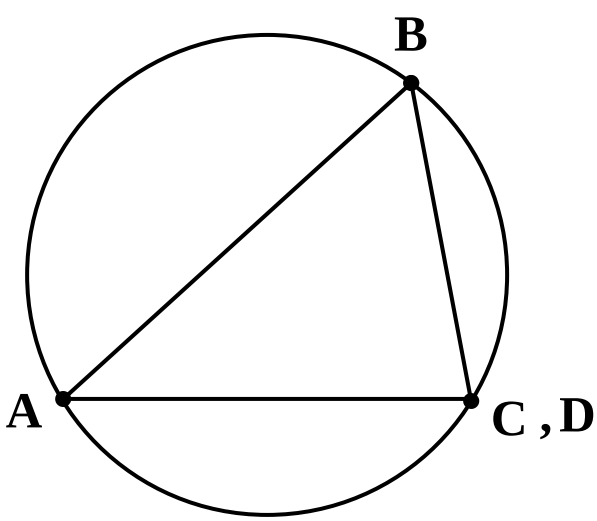
ហេតុនេះ $S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d)$

ដូចនេះ $S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$ ។

សម្គាល់ :

បើចំនុច $\mathbf{D \equiv C}$ នោះ $\mathbf{d = 0}$

គេបាន $\mathbf{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ រូបមន្តហេរ៉ុង ។



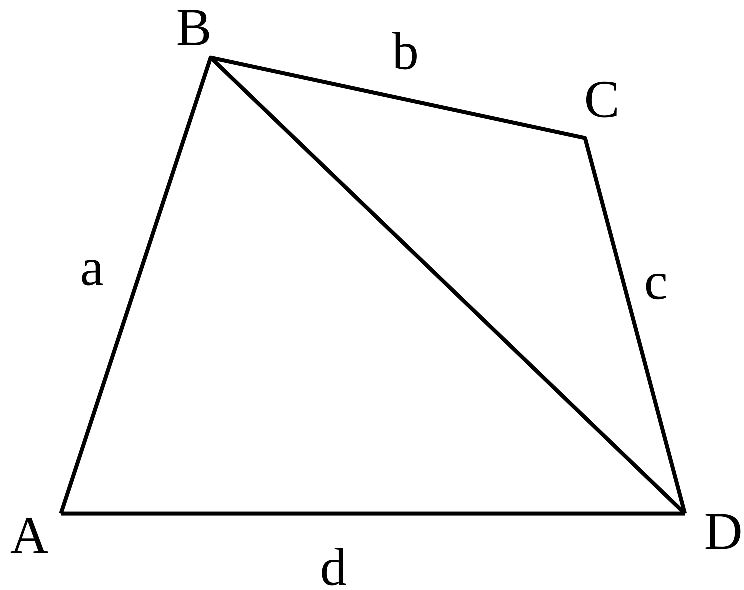
២២-រូបមន្តផ្ទៃក្រឡាចតុកោណប៉ោង

រូបមន្ត Bretschneider (Bretschneider's formula)

គេឱ្យចតុកោណប៉ោង $\mathbf{ABCD}$ មានជ្រុង $\mathbf{a, b, c, d}$ និងកន្លះបរិមាត្រ $\mathbf{p}$ នោះផ្ទៃក្រឡារបស់វាកំណត់ដោយ :

$$\mathbf{S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}}$$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



គេមាន $S = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}ad\sin A + \frac{1}{2}bd\sin C$

ឬ $ad\sin A + bd\sin C = 2S \quad (1)$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ **ABD** និង **BCD** គេបាន :

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$$

គេទាញ $ad\cos A - bc\cos C = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2} \quad (2)$

តាម $(1)\ \&\ (2)$ គេបាន

$$(ad\sin A + bc\sin C)^2 + (ad\cos A - bc\cos C)^2 = 4S^2 + $$
$$+ \left(\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2}\right)^2$$

គេទាញបាន ៖

$$4S^2 = (ad+bc)^2 - \frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4} - 4abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$

$$S^2 = \frac{\alpha\beta}{16} - abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$

ដែល $\alpha = 2(ad+bc)+(a^2+d^2-b^2-c^2)$

$$= (a+d)^2-(b-c)^2$$

$$= (a+d+b-c)(a+d-b+c)$$

និង $\beta = 2(ad+bc)-(a^2+d^2-b^2-c^2)$

$$= (b+c)^2-(a-d)^2$$

$$= (b+c+a-d)(b+c-a+d)$$

ដោយ $a+b+c+d = 2p$

នោះ $\alpha = 4(p-b)(p-c)$ និង $\beta = 4(p-a)(p-d)$

ហេតុនេះ $S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$

ដូចនេះ $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}$ ។

សម្គាល់ ៖

បើ $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់នោះ $\cos\frac{A+C}{2} = \cos 90^o = 0$

នោះ $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ។

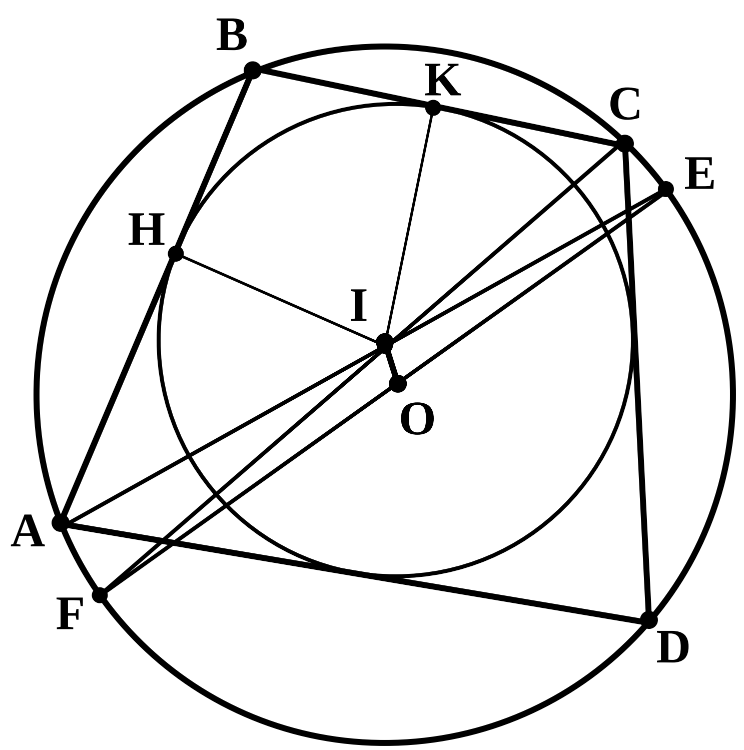
២៣-ចម្ងាយរវាងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅនៃចតុកោណប៉ោង

បើចតុកោណប៉ោង **ABCD** ចារឹកក្នុងរង្វង់ **C(O,R)** និងចារឹកក្រៅ

រង្វង់ **C'(I,r)** នោះគេបាន :

$\mathbf{d = OI = \sqrt{r^2 + R^2 - r\sqrt{r^2 + 4R^2}}}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



តាង **H** និង **K** ជាចំណុចប៉ះរវាងរង្វង់ **(C')** ជាមួយជ្រុង **[AB]**

និង **[BC]** ហើយ **E** និង **F** ជាចំណុចប្រសព្វរវាង **(AI)**

និង **(CI)** ជាមួយរង្វង់ **(C)** រៀងគ្នា ។

គេមាន $\angle DOF = 2\angle DCF = \angle DCB$

និង $\angle DOE = 2\angle DAE = \angle DAB$

គេបាន $\angle DOF + \angle DOE = \angle DCB + \angle DAB = 180^o$

នាំឱ្យ **[EF]** ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ **(C)** ។

តាមទ្រឹស្តីបទមេដ្យានក្នុងត្រីកោណ **EIF** គេបាន **:**

$$OI^2 = \frac{IE^2 + IF^2}{2} - \frac{EF^2}{4} = \frac{1}{2}(IE^2 + IF^2) - R^2 \ (1)$$

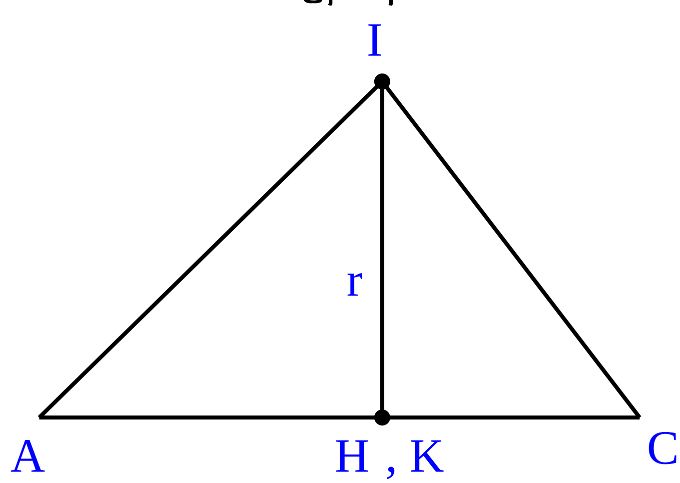
គេមាន $\angle IAB = \frac{\angle BAD}{2}$ និង $\angle ICB = \frac{\angle DCB}{2}$

គេបាន $\angle IAB + \angle ICB = \frac{\angle BAD + \angle DCB}{2} = \frac{180^o}{2} = 90^o$

សង់ $IH = IK = r$ ។

ពីរត្រីកោណកែង **IAH** និង **IKC** ផ្គុំគ្នាបង្កើតបានជាត្រីកោណកែង

ដែលមាន**IA** និង **IC** ជាជ្រុងមុំកែង និង $AH + KC$ ជាអ៊ីប៉ូតេនូស ។



តាមទំនាក់ទំនងមាត្រក្នុងត្រីកោណកែងគេបាន $\frac{1}{r^2}=\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IC^2}$ **(2)**

តាមទ្រឹស្តីបទស្វ័យគុណចំណុច **I** ធៀបនឹងរង្វង់ **(C)**

គេបាន $IA.IE=IC.IF=R^2-OI^2$

នាំឱ្យ $IA=\frac{R^2-OI^2}{IE}$ **(3)** និង $IC=\frac{R^2-OI^2}{IF}$ **(4)**

យកទំនាក់ទំនង (3) និង (4) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន **:**

$\frac{1}{r^2}=\frac{IE^2+IF^2}{(R^2-OI^2)^2}$ នាំឱ្យ $IE^2+IF^2=\frac{(R^2-OI^2)^2}{r^2}$ **(5)**

យកទំនាក់ទំនង (5) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន **:**

$$OI^2=\frac{(R^2-OI^2)^2}{2r^2}-R^2$$

ឬ $(R^2-OI^2)^2-2OI^2.r^2-2R^2r^2=0$

តាង $d=OI$ គេបាន $(R^2-d^2)^2-2d^2r^2-2R^2r^2=0$

ឬ $d^4-2(r^2+R^2)d^2+R^4-2R^2r^2=0$ តាង $t=d^2$

គេបាន $t^2-2(r^2+R^2)t+R^4-2R^2r^2=0$

ឌីសគ្រីមីណង់បង្រួម

$$\Delta'=(r^2+R^2)^2-(R^4-2R^2r^2)=r^2(r^2+4R^2)$$

គេទាញឫស $t_1=r^2+R^2-r\sqrt{r^2+4R^2}$

ឬ $t_2 = r^2 + R^2 + r\sqrt{r^2 + 4R^2}$

ដោយ $d < R$ នោះ $t = d^2 < R^2$ ។

ហេតុនេះ $t = d^2 = r^2 + R^2 - r\sqrt{r^2 + 4R^2}$

នាំឱ្យ$OI = d = \sqrt{r^2 + R^2 - r\sqrt{r^2 + 4R^2}}$ ពិត ។

សម្គាល់ :

តាមសមភាព $(R^2 - d^2)^2 - 2d^2r^2 - 2R^2r^2 = 0$

គេអាចសរសេរ :

$$(R^2 - d^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2) = r^2[(R+d)^2 + (R-d)^2]$$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $(R^2 - d^2)^2 r^2 = (R+d)^2(R-d)^2 r^2$

គេបានទំនាក់ទំនង

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}$$ ។

ជំពូកទី២

365 លំហាត់មានដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេឱ្យ **ABC** ជាត្រីកោណមួយហើយ **D** ជាជើងនៃកម្ពស់គូសពីកំពូល **A** ។

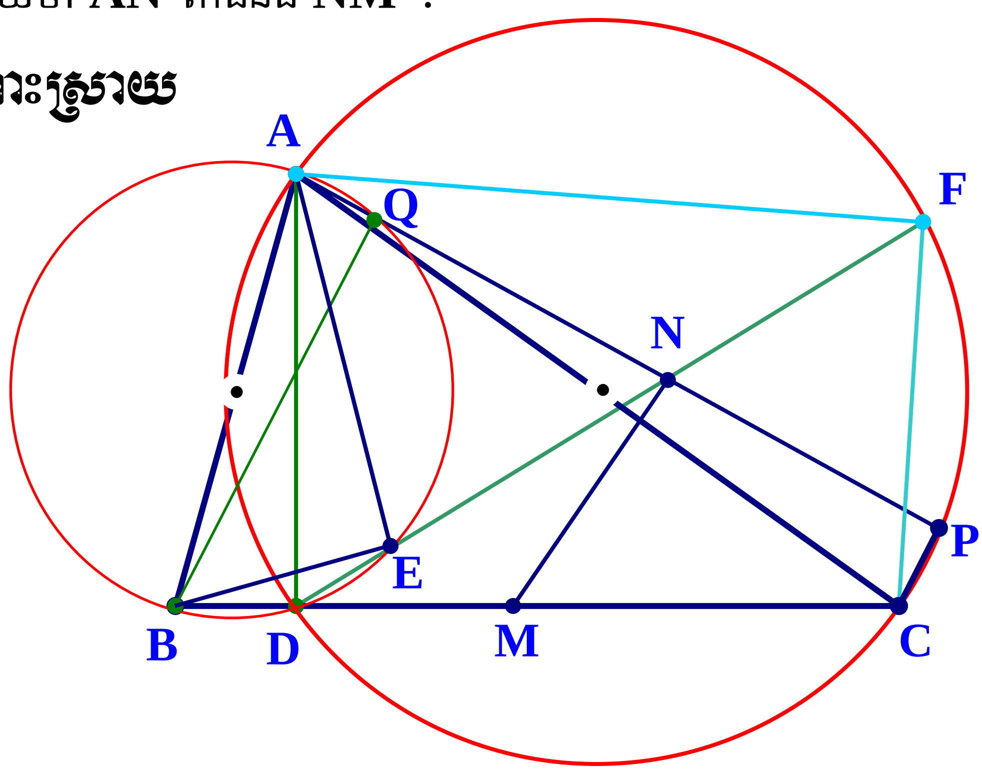
យក **E** និង **F** ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់កាត់តាម**D** ដោយដឹងថា **AE** កែងនឹង **BE**

ហើយ **AF** កែងនឹង **CF** ដែល **E** និង **F** ខុសពី **D** ។

យក **M** និង **N** ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ **BC** និង **EF** រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា **AN** កែងនឹង **NM** ?

ដំណោះស្រាយ



តាង (w_1) និង (w_2) ជារង្វង់មានអង្កត់ផ្ចិតរៀងគ្នា AB និង AC ។

គេបាន $E \in (w_1)$ ព្រោះ $AE \perp BE$ ហើយ $F \in (w_2)$ ព្រោះ $AF \perp CF$

តាង P និង Q ជាចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (AN) ជាមួយ(w_1) និង (w_2)

រៀងគ្នា ។

ចំនុច N នៅក្រៅរង្វង់ (w_1) នោះគេបាន $NE.NF = NQ.NA$ (1)

ព្រោះ N ជាចំណុចកណ្តាលនៃ EF ។

ចំពោះរង្វង់ (w_2) គេមាន $NF.NE = NP.NA$ (2)

តាម $(1) \& (2)$ គេទាញបាន $NQ.NA = NP.NA$ ឬ $NQ = NP$

ដោយ $MB = MC$ នោះគេបាន $MN // PC$ ហើយដោយ $AP \perp PC$

ដូចនេះ $AN \perp NM$ ។

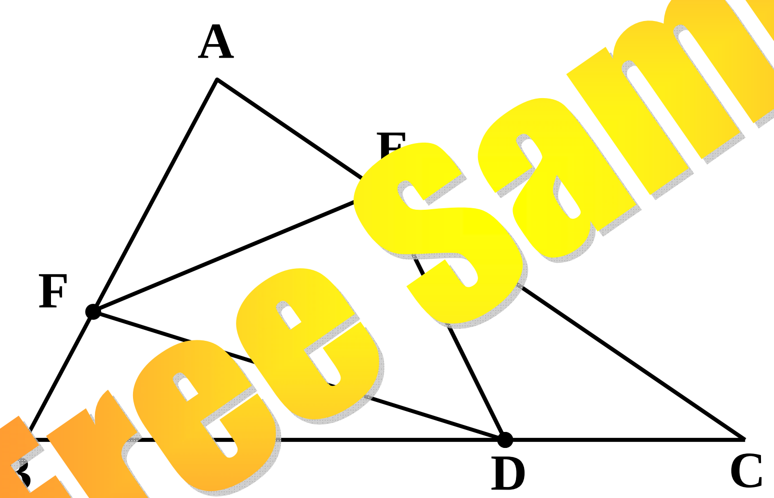
លំហាត់ទី២

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a, b, c និងមានផ្ទៃក្រឡា S ។

ឧបមាថាDEF ជាត្រីកោណចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :$DE + EF + FD \geq \frac{8S^2}{abc}$

ដំណោះស្រាយ



តាង $BD = x$, $CE = y$, $AF = z$ នោះ $\begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < b \\ 0 < z < c \end{cases}$

គេបាន $DC = a - x$, $AE = b - y$, $BF = c - z$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ BDF គេបាន :

$DF^2 = x^2 + (c-z)^2 - 2x(c-z)\cos B$

ដោយ $\cos B = \cos(\pi - (A+C)) = -\cos(A+C)$

នោះ $DF^2 = x^2 + (c-z)^2 + 2x(c-z)\cos(A+C)$

$$= [x\cos A + (c-z)\cos C]^2 + [x\sin A - (c-z)\sin C]^2$$

គេទាញបាន $DF \geq |x\cos A + (c-z)\cos C|$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $DE = |y\cos B + (a-x)\cos A|$

និង $EF = |z\cos C + (b-y)\cos B|$ ។

ដោយប្រើវិសមភាពត្រីកោណគេបាន :

$$DE + EF + FD \geq |a\cos A + b\cos B + c\cos C| \quad (1)$$

តាង $T = a\cos A + b\cos B + c\cos C$

$$= R\sin 2A + R\sin 2B + R\sin 2C$$

$$= R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

$$= 4R\sin A\sin B\sin C$$

$$= 4R.\frac{abc}{8R^3} = \frac{abc}{2R^2} = \frac{abc}{2(\frac{abc}{4S})^2} = \frac{8S^2}{abc}$$

ដូចនេះ $DE + EF + FD \geq \dfrac{8S^2}{abc}$ ។

ឯកសារយោង

១-គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០ភាគ២របស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

(បោះពុម្ពលើកទី១ ឆ្នាំ ២០០៨)

២-Challenges in Geometry

(Christopher J.Bradley)

៣- Inequalities A Mathematical Olympiad Approach

(Radmila Bulajich Manfrino Jose Antonio Gomez Ortega Rogelio Valdez Delgado)

៤-Geometric inequalities (By O.BOTEEM, R.Z.DJOPDJIVIC)

៥-INFINITY (Hojoo Lee, Tom Lovering, and Cosmin Pohoaţ)