

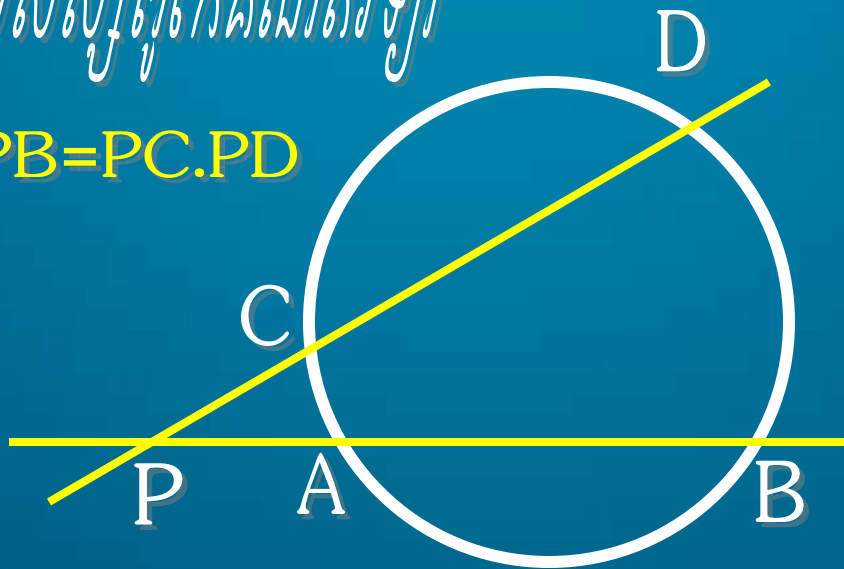
លីម ធីលុន និង វិសេន ពិសិដ្ឋ  
បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា

# 103 លំហាត់ជ្រើសរើស

## ធានណាម៉ាត្រក្នុងប្លង់

សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



រក្សាសិទ្ធិ

ជំពូកទី១

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

1. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង  $BC = a$ ,  $AC = b$  និង  $AB = c$  ។

កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A កាត់ BC ត្រង់ L ។

ចូរស្រាយថា  $\frac{BL}{LC} = \frac{c}{b}$  រួចគណនា BL និង LC ជាអនុគមន៍នៃ a, b, c ។

2. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណត្រង់ចំនុច K ។

ចូរស្រាយថា  $AK = \frac{b+c}{2 \cos \frac{A}{2}}$  ដែល  $AC = b$ ,  $AB = c$  ។

3. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង  $BC = a$ ,  $AC = b$  និង  $AB = c$  ។

កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A កាត់ BC ត្រង់ L ។

ចូរស្រាយថា  $AL^2 = bc \left[ 1 - \left( \frac{a}{b+c} \right)^2 \right]$  ។

4. គេឱ្យត្រីកោណសម័ង្ស ABC មួយហើយ Q ជាចំនុចមួយនៃជ្រុង [BC] បន្ទាត់ (AQ) កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ABC ត្រង់ P ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា  $\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}$  ។

## ធនេនីមាត្រវិភាគក្នុងប្លង់

---

5. គេឱ្យការេ  $ABCD$  មួយ ហើយ  $P$  ជាចំនុចមួយនៅក្នុងការេដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$$\angle PAB = \angle PBC = 15^{\circ} \text{ ។}$$

ចូរបង្ហាញថា  $PCD$  ជាត្រីកោណសម័ង្ស ?

6. គេតាង  $r_1$  និង  $r_2$  ជាកាំនៃរង្វង់ផ្ចិត  $A$  ដែលប៉ះនឹងជ្រុង  $BC$  នៃ  $\Delta ABC$

រៀងគ្នាត្រង់  $B$  និង  $C$  ។

ចូរស្រាយថា  $r_1 \cdot r_2 = R^2$  ( $R$  ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ  $\Delta ABC$ )

7. គេឱ្យចតុកោណប៉ោង  $ABCD$  មួយមានជ្រុង  $AB = a$  ,  $BC = b$  ,  $CD = c$

និង  $DA = d$  ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ ។ ចូរស្រាយថា  $\frac{AC}{BD} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$  ។

8. បើចតុកោណប៉ោង  $ABCD$  មួយមានជ្រុង  $AB = a$  ,  $BC = b$  ,  $CD = c$

និង  $DA = d$  ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ ហើយចារឹកក្រៅរង្វង់មួយទៀតនោះបង្ហាញថា

ផ្ទៃក្រឡា  $S$  របស់វាគឺ  $S = \sqrt{abcd}$  ។

9. បើចតុកោណប៉ោង  $ABCD$  មួយមានជ្រុង  $AB = a$  ,  $BC = b$  ,  $CD = c$

និង  $DA = d$  ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយមានកាំ  $R$  នោះបង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡា  $S$  របស់វា

កំណត់ដោយ  $S^2 = \frac{(bc + ad)(ac + bd)(ab + cd)}{16R^2}$  ។

10. តាង  $\varphi$  ជាមុំផ្គុំដោយអង្កត់ទ្រូង  $AC$  និង  $BD$  របស់ចតុកោណប៉ោង  $ABCD$

ចូរស្រាយថាផ្ទៃក្រឡារបស់ចតុកោណនេះកំណត់ដោយ  $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \varphi$

**ធនេយ៍មាត្រវិភាគក្នុងប្លង់**

---

11. គេឱ្យត្រីកោណសមញ្ញ  $ABC$  មួយមានជ្រុង  $BC = a$  ,  $AC = b$  ,  $AB = c$  គេតាង  $p$  ជាកន្លះបរិមាត្រ  $r$  ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង  $R$  ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង  $S$  ជាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ ហើយ  $r_A$  ,  $r_B$  ,  $r_C$  តាងរៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណក្នុងមុំរៀងគ្នា  $A$  ,  $B$  ,  $C$  ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម :

១.  $ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4R.r$

២.  $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8R.r$

៣.  $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{r}{p}$

៤.  $r_A r_B + r_B r_C + r_C r_A = p^2$

៥.  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C}$

៦.  $\frac{a}{S} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_A}$

៧.  $\frac{a}{S} = \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C}$

៨.  $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$

៩.  $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} = \frac{4R + r}{p}$

១០.  $\frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{(p-c)(p-a)} = \frac{1}{r}$

$$១១. \sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R}$$

$$១២. p^2 = \frac{r_A r_B r_C}{r}$$

$$១៣. \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{p}{4R}$$

$$១៤. \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

$$១៥. \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{\tan A}{\tan B}$$

$$១៦. \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin A \sin B \cos A$$

$$១៧. \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \frac{p}{r}$$

$$១៨. S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

$$១៩. S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 c^2 \sin A \sin B \sin C}$$

$$២០. \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{2S}{R^2}$$

$$២១. r r_A (r_B + r_C) = a.S$$

$$២២. \frac{r}{r_A} = \frac{p - a}{p}$$

$$២៣. r_A + r_B + r_C = 4R + r$$

$$២៤. r \cdot r_A = (p - b)(p - c)$$

12. គេឱ្យ  $a, b, c$  ជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក.  $3 < bc + ca + ab \leq (a + b + c)^2 < 4(bc + ca + ab)$

ខ.  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{36}{35} \left( p^2 + \frac{abc}{p} \right)$  ដែល  $p = \frac{a + b + c}{2}$

គ.  $\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 3$

ឃ.  $(p - a)(p - b)(p - c) \leq \frac{abc}{8}$

13. ត្រីកោណ  $ABC$  មានជ្រុង  $a, b, c$  ហើយតាង  $r$  ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង  $p$  ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា  $\frac{1}{(p - a)^2} + \frac{1}{(p - b)^2} + \frac{1}{(p - c)^2} \geq \frac{1}{r^2}$  ។

14. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក.  $abc < a^2(p - a) + b^2(p - b) + c^2(p - c) \leq \frac{3}{2}abc$

ខ.  $bc(b + c) + ca(c + a) + ab(a + b) \geq 48(p - a)(p - b)(p - c)$

គ.  $a^3(p - a) + b^3(p - b) + c^3(p - c) \leq abc p$

ដែល  $a, b, c$  ជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ និង  $p$  ជាកន្លះបរិមាត្រ ។

15. បើ  $a, b, c$  ជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយនោះចូរស្រាយថា :

$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geq 0$

តើពេលណាទើបគេបានសមភាព ។

16. គេតាង  $a, b, c$  ជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ហើយ  $p = \frac{a+b+c}{2}$  ។

ចូរបង្ហាញថា :

ក.  $64p^3(p-a)(p-b)(p-c) \leq 27a^2b^2c^2$

ខ.  $\frac{2p}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

គ.  $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{9}{p}$

ឃ.  $\frac{15}{4} \leq \frac{p+a}{b+c} + \frac{p+b}{c+a} + \frac{p+c}{a+b} < \frac{9}{2}$

ង.  $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}$

17. គេឱ្យត្រីកោណ  $ABC$  មួយមានជ្រុង  $a, b, c$  ។ តាង  $R$  ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនេះ ។

ក. ស្រាយថា  $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2(1 + \cos A \cos B \cos C)$

ខ. ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទឱ្យបនិចចូរទាញថា  $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$  ។

គ. បើ  $A, B, C$  ជាមុំស្រួចនោះ  $2 < \sin A + \sin B + \sin C < \frac{3\sqrt{3}}{2}$  ។

18. ក្នុងត្រីកោណ  $ABC$  មួយចូរស្រាយថា :

ក.  $a \cos A + b \cos B + c \cos C = \frac{2S}{R}$

ខ.  $\sin A + \sin B + \sin C \geq \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

**ធនេយ៍មាត្រវិភាគក្នុងម្ខាង**

---

19. គេឱ្យត្រីកោណ  $ABC$  មួយមានជ្រុង  $a, b, c$  ។

ក. ស្រាយថា  $\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$  រួចទាញថា  $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$  ។

ខ. តាង  $r$  និង  $R$  ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ  $ABC$  ។

បង្ហាញថា  $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$  រួចទាញថា  $R \geq 2r$  ។

20. គេឱ្យត្រីកោណ  $ABC$  មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា  $\cos A + \sqrt{2}(\cos B + \cos C) \leq 2$  ?

តើពេលណាទើបសមភាពនេះក្លាយជាសមភាព ?

21. ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ  $ABC$  ចូរស្រាយថា :

$\cos A + \lambda(\cos B + \cos C) \leq 1 + \frac{\lambda^2}{2}$  គ្រប់ចំនួនពិត  $\lambda \neq 0$  ។

22. គេឱ្យ  $x, y, z$  ជាចំនួនពិតដែល  $xyz > 0$  ។

ចូរស្រាយថា  $x \cos A + y \cos B + z \cos C \leq \frac{1}{2} \left( \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \right)$

ដែល  $A, B, C$  ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណមួយ ។

23. ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ  $ABC$  ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក.  $\cos^2(A - B) + \cos^2(B - C) + \cos^2(C - A) \geq 24 \cos A \cos B \cos C$

ខ.  $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$

គ.  $\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \geq 1$



24. ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា :

ក.  $\sqrt{\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + 5} + \sqrt{\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + 5} + \sqrt{\tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} + 5} \leq 4\sqrt{3}$

ខ.  $\tan^6 \frac{A}{2} + \tan^6 \frac{B}{2} + \tan^6 \frac{C}{2} \geq \frac{1}{9}$

គ.  $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$

25. ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា :

ក.  $\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$

ខ.  $\cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2} \geq 9$

26. ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា :

$$\frac{1 + \cos A \cos B \cos C}{\sin A \sin B \sin C} \geq \sqrt{3}$$

តើគេបានសមភាពនៅពេលណា ?

27. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a, b, c ។

ស្រាយថាបើ  $a < \frac{b+c}{2}$  នោះ  $A < \frac{B+C}{2}$  ។

28. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a, b, c ។

តាង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង S ជាផ្ទៃក្រលាបសំត្រីកោណនេះ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា  $a \sin A + b \sin B + c \sin C \geq \frac{2\sqrt{3}S}{R}$

29. ត្រីកោណ **ABC** មួយមានមុំ  $A > B > C$  ។

តាង **R** ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង ហើយ **r** ជាចម្ងាយរវាងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$2R \cos A < R - d < 2R \cos B < R + d < 2R \cos C$$

30. គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង  $a, b, c$  ។

តាង **R** ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងហើយ **r** ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា  $9r \leq a \sin A + b \sin B + c \sin C \leq \frac{9R}{2}$  ។

31. គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង  $a, b, c$  ។

តាង **S** ជាផ្ទៃក្រលាផ្ទៃនៃត្រីកោណនេះ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក.  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

ខ.  $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$

គ.  $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \geq 16S^2$

ឃ.  $4\sqrt{3}S \leq \frac{9abc}{a+b+c}$

ង.  $(abc)^2 \geq \left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^3$

32. គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង  $a, b, c$  ។

តាង **S** ជាផ្ទៃក្រលាផ្ទៃនៃត្រីកោណនេះ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$27(b^2 + c^2 - a^2)^2(c^2 + a^2 - b^2)^2(a^2 + b^2 - c^2)^2 \leq (4S)^6$$

33. គេឱ្យត្រីកោណ  $ABC$  មួយមានជ្រុង  $a, b, c$  ។

តាង  $S$  ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណនេះ ហើយយក  $u = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$

និង  $v = bc + ca + ab$  ។

ស្រាយថា  $\frac{(u - v)(3u - 5v)}{12} \leq S^2 \leq \frac{(u - v)^2}{12}$  ។

34. តាង  $S$  ជាផ្ទៃក្រឡា និង  $a, b, c$  ជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។

គ្រប់  $n > 0$  បង្ហាញថា  $S \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \times \sqrt[3]{\frac{a^n + b^n + c^n}{3}}$  ។

35. គេឱ្យត្រីកោណ  $ABC$  មួយមានជ្រុង  $a, b, c$  ។ គេតាង  $r$  និង  $R$

រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

យក  $O$  ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ  $I$  ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង  $H$  ជាអរតូសង់  
នៃត្រីកោណ  $ABC$  ។ ស្រាយថា  $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$

និង  $IH^2 = 2r^2 - 4R^2 \cos A \cos B \cos C$  ។

36. គេតាង  $r$  និង  $R$  រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ

មួយដែលមាន  $p$  ជាកន្លះបរិមាត្រ ។ ចូរស្រាយថា :

ក.  $9r(r + 4R) \leq 3p^2 \leq (4R + r)^2$

ខ.  $6r(r + 4R) \leq 2p^2 \leq R^2 + 2(r + 2R)^2$

គ.  $2p^2(2R - r) \leq R(4R + r)^2$

ឃ.  $r(16R - 5r) \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$

37. ត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង **a, b, c** គេតាង **p** ជាកន្លះបរិមាត្រ **r** និង **R**

រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ។ ចូរស្រាយថា :

ក.  $p^2 \geq 27r^2$

ខ.  $2p^2 \geq 27rR$

គ.  $36r^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$

ឃ.  $3(2rR - r^2) \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \leq r^2 + 2R^2$

ង.  $36r^2 \leq bc + ca + ab \leq 9R^2$

ច.  $5rR - r^2 \leq \frac{bc + ca + ab}{4} \leq (r + R)^2$

ឆ.  $a(p - a) + b(p - b) + c(p - c) \leq 9Rr$

ជ.  $abc \leq 8rR^2 + (12\sqrt{3} - 16)Rr^2$

ឈ.  $\frac{\sqrt{3}}{R} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2r}$

ញ.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2(R+r)}$

ដ.  $\frac{1}{R^2} \leq \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} \leq \frac{1}{4r^2}$

ប.  $4r^2 \leq \frac{abc}{a+b+c}$

ឡ.  $abc \leq (R\sqrt{3})^3$

38. គេឱ្យត្រីកោណសមញ្ញ  $ABC$  មួយមានជ្រុង  $BC = a$  ,  $AC = b$  ,  $AB = c$  គេតាង  $p$  ជាកន្លះបរិមាត្រ  $r$  ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង  $R$  ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង  $S$  ជាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ ហើយ  $r_A$  ,  $r_B$  ,  $r_C$  តាងរង្វង់គ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណក្នុងមុំរង្វង់គ្នា  $A$  ,  $B$  ,  $C$  ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

- ក.  $\frac{a^2}{r_B r_C} + \frac{b^2}{r_C r_A} + \frac{c^2}{r_A r_B} \geq 4$
- ខ.  $p - a < \frac{4R - r_A}{\sqrt{3}}$
- គ.  $\sqrt{3} + \frac{a^2 + (b - c)^2}{2S} \leq \frac{4R - r_A}{p - a}$
- ឃ.  $p^2 \leq r_A^2 + r_B^2 + r_C^2$
- ង.  $\frac{r_A}{a} \times \frac{r_B}{b} \times \frac{r_C}{c} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$
- ច.  $\frac{r_B r_C + r_C r_A + r_A r_B}{bc + ca + ab} \geq \frac{3}{4}$
- ឆ.  $9r \leq r_A + r_B + r_C \leq \frac{9}{2}R$
- ជ.  $r_A^2 + r_B^2 + r_C^2 \geq \frac{27}{4}R^2$
- ឈ.  $r^2 + r_A^2 + r_B^2 + r_C^2 \geq 7R^2$
- ញ.  $S\sqrt{3} \leq (R + r)^2$

39. គេឱ្យត្រីកោណសមញ្ញ  $ABC$  មួយមានជ្រុង  $BC = a$  ,  $AC = b$  ,  $AB = c$  គេតាង  $p$  ជាកន្លះបរិមាត្រ  $r$  ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង  $R$  ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង  $S$  ជាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ ហើយ  $m_a$  ,  $m_b$  ,  $m_c$  តាងរៀងគ្នាជាមេដ្យាន និង  $h_a$  ,  $h_b$  ,  $h_c$  ជាកម្ពស់គូសចេញពីកំពូលរៀងគ្នា  $A$  ,  $B$  ,  $C$  ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក.  $9r \leq m_a + m_b + m_c \leq \frac{9}{2}R$

ខ.  $9r \leq h_a + h_b + h_c \leq \frac{9R}{2}$

គ.  $S \leq \frac{\sqrt{3}}{27} (m_a + m_b + m_c)^2$

ឃ.  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq 3\sqrt{3}S$

ង.  $m_a + m_b + m_c \leq 4R + r$

40. គេឱ្យត្រីកោណសមញ្ញ  $ABC$  មួយមានជ្រុង  $BC = a$  ,  $AC = b$  ,  $AB = c$

តាង  $l_A$  ,  $l_B$  ,  $l_C$  រៀងគ្នាជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ  $A$  ,  $B$  ,  $C$  និង  $S$  ជា

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ។ ចូរស្រាយថា :

ក.  $l_A^2 + l_B^2 + l_C^2 \geq 3\sqrt{3}S$

ខ.  $16(l_A^4 + l_B^4 + l_C^4) \leq 9(a^4 + b^4 + c^4)$

គ.  $l_A \cdot l_B \cdot l_C \leq p \cdot S$  ដែល  $p = \frac{a+b+c}{2}$  ។

41. គេយក  $P$  ជាចំនុចនៅក្នុងត្រីកោណ  $ABC$  ហើយ  $D, E, F$  ជាប្រសព្វរវាង  $AP, BP, CP$  ជាមួយជ្រុង  $BC, CA, AB$  រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា 
$$\frac{AD}{AP} + \frac{BE}{BP} + \frac{CF}{CP} \geq \frac{9}{2} \quad ។$$

42. រង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ  $ABC$  ប៉ះនឹងជ្រុង  $BC, CA, AB$  រៀងគ្នាត្រង់ចំណុច  $D, E, F$  ។

ស្រាយថា 
$$\left(\frac{BC}{EF}\right)^2 + \left(\frac{CA}{FD}\right)^2 + \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 \geq 12$$

43. គេឱ្យត្រីកោណ  $ABC$  មួយមានកម្ពស់  $AD, BE, CF$  ។

ស្រាយថា 
$$\left(\frac{EF}{BC}\right)^2 + \left(\frac{FD}{CA}\right)^2 + \left(\frac{DE}{AB}\right)^2 \geq \frac{3}{4}$$

44. គេមានត្រីកោណ  $ABC$  មួយមានជ្រុង  $a, b, c$  និងផ្ទៃក្រលា  $S$  ។

តាង  $T$  ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណសម័ង្សចារឹកក្នុងត្រីកោណ  $ABC$  ខាងលើ ។

ចូរស្រាយថា 
$$T \geq \frac{2\sqrt{3}S^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S} \quad ។$$

45. គេមានត្រីកោណពីរ  $ABC$  និង  $XYZ$  ចារឹកក្នុងរង្វង់តែមួយ ។

គេដឹងថា  $AX \parallel BC, BY \parallel CA, CZ \parallel AB$  ។

តាង  $a, b, c$  ជាជ្រុងនៃ  $\Delta ABC$  និង  $x, y, z$  ជាជ្រុងនៃ  $\Delta XYZ$  ។

ស្រាយថា 
$$\frac{x+y+z}{a+b+c} \leq 1 \quad \text{និង} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 3 \quad ។$$

46. គេឱ្យត្រីកោណ  $ABC$  មួយកែងត្រង់  $A$  និងមានកម្ពស់  $AH = h$  ។

តាង  $r$  ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា  $\sqrt{2} - 1 \leq \frac{r}{h} < \frac{1}{2}$  ?

47. គេឱ្យត្រីកោណ  $ABC$  មួយកែងត្រង់  $A$  ។

គេតាង  $r$  ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :

$r \geq \sqrt{\frac{2}{AB \cdot AC} - \frac{BC}{2}}$  ។ តើពេលណាទើបគេបានសមភាព ?

48. គេតាង  $P$  ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ  $ABC$  ហើយយក  $D, E, F$  ជាចំនុច

ប្រសព្វរវាងបន្ទាត់  $AP, BP, CP$  ជាមួយជ្រុង  $BC, CA, AB$  រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា  $\frac{AP}{PD} + \frac{BP}{PE} + \frac{CP}{PF} \geq 6$  និង  $\frac{AP}{PD} \cdot \frac{BP}{PE} \cdot \frac{CP}{PF} \geq 8$

49. គេតាង  $A_1, B_1, C_1$  ជាបីចំនុចស្ថិតនៅលើជ្រុង  $BC, CA, AB$  នៃ  $\Delta ABC$

ចូរបង្ហាញថា  $\frac{1}{2} < \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{AB + BC + CA} < \frac{3}{2}$  ។

50. ក្នុងត្រីកោណ  $ABC$  មួយចូរស្រាយថា :

$\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\cos A + \cos B} + \frac{\cos^2 B + \cos^2 C}{\cos B + \cos C} + \frac{\cos^2 C + \cos^2 A}{\cos C + \cos A} \geq 1 + \frac{r}{R}$

51. គេមានត្រីកោណ  $ABC$  មួយកែងត្រង់  $A$  ។ តាង  $M, N, P$  ជាចំនុចប៉ះ

រវាងរង្វង់ចារឹកក្នុងជាមួយជ្រុង  $BC, CA, AB$  ។ ចូរស្រាយថា :

$MN + MP \leq \frac{4\sqrt{3}}{9} BC$  ។



52. ត្រីកោណ  $ABC$  មួយមានកំពស់រង្វង់ផ្ចិត  $O$  កាំ  $R$  ។

តាង  $R_1, R_2, R_3$  ជាកំពស់មេត្រីក្រៅនៃត្រីកោណ  $OAB, OBC, OCA$

រៀបគ្នា ។ ស្រាយថា  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \geq \frac{3 + 2\sqrt{3}}{R}$  ?

53. បើ  $ABCD$  ជាប្រលេឡូក្រាមនោះបង្ហាញថា  $|AB^2 - BC^2| < AC \cdot BD$  ។

54. បើ  $a, b, c$  ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ហើយ  $m_a, m_b, m_c$  ជាមេដ្យាន និង  $R$  ជាកំពស់មេត្រីក្នុងនោះបង្ហាញថា :

ក. 
$$\frac{a^2 + b^2}{m_c} + \frac{b^2 + c^2}{m_a} + \frac{c^2 + a^2}{m_b} \leq 12R$$

ខ. 
$$m_a(bc - a^2) + m_b(ca - b^2) + m_c(ab - c^2) \geq 0$$

55. (APMO, 1996) តាង  $a, b, c$  ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

56. (IMO, 1964) តាង  $a, b, c$  ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

57. (IMO, 1983) តាង  $a, b, c$  ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$
 ។

58. គេឱ្យត្រីកោណ  $ABC$  មួយកែងត្រង់  $A$  ។ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់  $n \geq 2$

ចូរស្រាយថា  $AB^n + AC^n \geq BC^n$  ។

**បណ្តឹងមតិយោបល់**

59. តាង  $h_a, h_b, h_c$  ជាប្រវែងកម្ពស់នៃត្រីកោណ  $ABC$  មួយដែលចារឹកក្រៅ រង្វង់ផ្ចិត  $I$  និងកាំ  $r$  ។ ចូរស្រាយថា :

ក.  $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$                                   ខ.  $h_a + h_b + h_c \geq 9r$

60. (Korea, 1995) គេឱ្យត្រីកោណ  $ABC$  មួយហើយតាង  $L, M, N$  ជាចំនុចស្ថិតលើជ្រុង  $BC, CA, AB$  រៀងគ្នា ។ តាង  $P, Q$  និង  $R$  ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់  $AL, BM$  និង  $CN$  ជាមួយរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ  $\Delta ABC$  រៀងគ្នា ។ ចូរស្រាយថា

$\frac{AL}{LP} + \frac{BM}{MQ} + \frac{CN}{NR} \geq 9$  ។

61. (Shortlist IMO, 1997) ប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណ  $ABCDEF$  ផ្ទៀងផ្ទាត់  $AB = BC, CD = DE$  និង  $EF = FA$  ។

ចូរស្រាយថា  $\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}$  ។

62. គេយក  $AD, BE, CF$  ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណ  $ABC$  ហើយ  $PQ, PR, PS$  ជាចម្ងាយពីចំនុច  $P$  ទៅជ្រុង  $BC, CA, AB$  រៀងគ្នា ។

ចូរបង្ហាញថា  $\frac{AD}{PQ} + \frac{BE}{PR} + \frac{CF}{PS} \geq 9$  ។

63. សន្មតថារង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ  $ABC$  ប៉ះទៅនឹងជ្រុង  $BC, CA, AB$

រៀងគ្នាត្រង់  $D, E, F$  ។ បង្ហាញថា  $EF^2 + FD^2 + DE^2 \leq \frac{p^2}{3}$

ដែល  $p$  ជាកន្លះបរិមាត្រនៃ  $\Delta ABC$  ។

64. ត្រីកោណ  $ABC$  មួយមានជ្រុង  $a, b, c$  និងតាង  $S$  ជាផ្ទៃក្រលា នៃ  $\Delta ABC$  ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក.  $a^2 + b^2 + c^2 \geq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + 4\sqrt{3}S$

ខ.  $ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}S$

គ.  $\frac{3(a + b + c)abc}{ab + bc + ca} \geq 4\sqrt{3}S$

65. តាង  $a, b, c$  ជាជ្រុង និង  $R$  ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណមួយ ។

ចូរស្រាយថា  $\frac{a^2}{b + c - a} + \frac{b^2}{c + a - b} + \frac{c^2}{a + b - c} \geq 3\sqrt{3}R$  ។

66. ចតុកោណប៉ោង  $ABCD$  មួយមានជ្រុង  $a, b, c, d$  ។ តាង  $S$  ជាផ្ទៃក្រឡា

របស់ចតុកោណនេះ ។ ចូរស្រាយថា :

ក.  $S \leq \frac{ab + cd}{2}$

ខ.  $S \leq \frac{ac + bd}{2}$

គ.  $S \leq \left(\frac{a + c}{2}\right)\left(\frac{b + d}{2}\right)$

67. បើ  $P$  ជាចំនុចនៅក្នុងត្រីកោណ  $ABC$  ដែល  $l = PA, m = PB, n = PC$

នោះចូរស្រាយថា  $(lm + mn + nl)(l + m + n) \geq a^2l + b^2m + c^2n$

ដែល  $a, b, c$  ជាជ្រុងនៃ  $\Delta ABC$  ។

68. គេតាង  $O$  ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង  $G$  ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃ  $\Delta ABC$  មួយ ។

គេតាង  $r$  និង  $R$  រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា  $OG \leq \sqrt{R(R - 2r)}$  ។ (Balkan, 1996)

69. (Taiwan, 1997) គេឱ្យត្រីកោណ  $ABC$  មួយចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត  $O$  និងកាំ  $R$  ។

ស្រាយថាបើ  $AO$  កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ  $OBC$  ត្រង់  $D$  ហើយ  $BO$  កាត់រង្វង់

ចារឹកក្រៅនៃ  $OCA$  ត្រង់  $E$  ហើយ  $CO$  កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ  $OAB$

ត្រង់  $F$  នោះ  $OD.OE.OF \geq 8R^3$  ។

70. (APMO, 1997) គេឱ្យ  $ABC$  ជាត្រីកោណមួយ ។ បន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ  $A$  ជួបអង្កត់

$BC$  ត្រង់  $X$  និងជួបរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ  $\Delta ABC$  ត្រង់  $Y$  ។ តាង  $L_a = \frac{AX}{AY}$  ។

គេកំណត់  $L_b$  និង  $L_c$  តាមរបៀបដូចគ្នាដែរ ។

ចូរស្រាយថា  $\frac{L_a}{\sin^2 A} + \frac{L_b}{\sin^2 B} + \frac{L_c}{\sin^2 C} \geq 3$  ?

71. (Balkan, 1999) គេឱ្យ  $ABC$  ជាត្រីកោណមួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ហើយតាង

$L, M, N$  ជានិច្ចនៃចំណោលកែងពីទីប្រជុំទម្ងន់  $G$  នៃត្រីកោណ  $ABC$  ទៅលើ

ជ្រុង  $BC, CA, AB$  រៀងគ្នា ។

ចូរបញ្ជាក់ថា  $\frac{4}{27} < \frac{S_{LMN}}{S_{ABC}} \leq \frac{1}{4}$  ?

72. តាង **D** និង **E** ជាចំនុចនៅលើជ្រុង **AB** និង **CA** នៃត្រីកោណ **ABC**

ដោយដឹងថា **DE** ស្របនឹង **BC** ហើយ **DE** ប៉ះនឹងរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃ  $\Delta ABC$  ។

ចូរបង្ហាញថា  $DE \leq \frac{AB + BC + CA}{8}$  ។ (Italy, 1999)

73. (Mediterranean, 2000) តាង **P, Q, R, S** ជាចំនុចកណ្តាល រៀងគ្នា

**BC, CD, DA, AB** នៃចតុកោណប៉ោង **ABCD** មួយ ។ ចូរស្រាយថា :

$$4(AP^2 + BQ^2 + CR^2 + DS^2) \leq 5(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2)$$

74. គេតាង **R** និង **r** ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង កាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃ  $\Delta ABC$  ។

សន្មតថា  $\angle A$  ជាមុំធំជាងគេនៃត្រីកោណ **ABC** ។ យក **M** ជាចំណុចកណ្តាល

នៃ **BC** ហើយ **X** ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ **ABC**

ត្រង់ **B** និង **C** ។ ចូរស្រាយថា  $\frac{r}{R} \geq \frac{AM}{AX}$  (Korea, 2004)

75. គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយហើយយក **O** ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណនេះ ។

បន្ទាត់ **OA, OB, OC** ជួបជ្រុងនៃត្រីកោណត្រង់ **A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub>** រៀងគ្នា ។

តាង **R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub>, R<sub>3</sub>** ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ **OBC, OCA, OAB**

រៀងគ្នាហើយ **R** ជាកាំនៃរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ  $\Delta ABC$  ។

ចូរស្រាយថា  $\frac{OA_1}{AA_1} \cdot R_1 + \frac{OB_1}{BB_1} \cdot R_2 + \frac{OC_1}{CC_1} \cdot R_3 \geq R$  (Romania, 2004)

76. មុំក្នុងនៃត្រីកោណ  $ABC$  មួយជាមុំស្រួច ហើយ  $\angle ACB = 2\angle ABC$  ។

$D$  ជាចំនុចមួយស្ថិតលើជ្រុង  $BC$  ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់  $2\angle BAD = \angle ABC$  ។

ចូរស្រាយថា  $\frac{1}{BD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$  ?

( Mathematical Olympiad in Poland 1999 )

77. ចំណុច  $D$  និង  $E$  ស្ថិតនៅលើជ្រុង  $BC$  និង  $AC$  នៃត្រីកោណ  $ABC$  រៀងគ្នា

បន្ទាត់  $AD$  និង  $BC$  កាត់គ្នាត្រង់  $P$  ។  $K$  និង  $L$  ជាចំណុចនៅលើជ្រុង  $BC$

និង  $AC$  រៀងគ្នាដែល  $CLPK$  ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ចូរស្រាយថា  $\frac{AE}{EL} = \frac{BD}{DK}$

( Mathematical Olympiad in Poland 2000 )

78. បីចំណុចខុសគ្នា  $A, B, C$  ស្ថិតនៅលើរង្វង់  $(O)$  ។

បន្ទាត់ប៉ះរង្វង់  $(O)$  ត្រង់  $A$  និង  $B$  កាត់គ្នាត្រង់  $P$  ។ បន្ទាត់ប៉ះរង្វង់  $(O)$  ត្រង់  $C$

កាត់បន្ទាត់  $AB$  ត្រង់  $Q$  ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា  $PQ^2 = PB^2 + QC^2$  ?

( Mathematical Olympiad in Poland 2002 )

79. បន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណសម័ង្ស  $ABC$  កាត់ជ្រុង  $AB$

និង  $AC$  ត្រង់  $D$  និង  $E$  ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា  $\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = 1$  ?

( Mathematical Olympiad in Poland 1995 )

**ធនេយ៍មាត្រវិភាគក្នុងប្លង់**

---

80. បន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ  $A, B, C$  នៃត្រីកោណ  $ABC$  មួយកាត់ជ្រុងឈមត្រង់  $D, E, F$  រៀងគ្នា ហើយកាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ  $ABC$  ត្រង់  $K, L, M$  រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា  $\frac{AD}{DK} + \frac{BE}{EL} + \frac{CF}{FM} \geq 9$  ?

( Mathematical Olympiad in Poland 1996 )

81. ក្នុងត្រីកោណ  $ABC$  មួយមាន  $AB > AC$  ។  $D$  ជាចំណុចកណ្តាលនៃ  $BC$  ហើយ  $E$  ស្ថិតនៅលើ  $AC$  ។  $P$  និង  $Q$  ជាជើងនៃចំណោលកែងពីចំណុច  $B$  និង  $E$  រៀងគ្នាទៅលើបន្ទាត់  $AD$  ។ បង្ហាញថា  $BE = AE + AC$  លុះត្រាតែ  $AD = PQ$  ?

(Mathematical Olympiad in Poland 1997 )

82. គេតាង  $O$  ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង  $H$  ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណ  $ABC$  មួយ ដែលមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរស្រាយថាផ្ទៃក្រឡាមួយនៃត្រីកោណ  $AOH, BOH, COH$  ស្មើនឹងផលបូកនៃផ្ទៃក្រឡាពីរផ្សេងទៀត ?

(Asian–Pacific Mathematical Olympiad 2004 )

83. ក្នុងត្រីកោណ  $ABC$  ចំណុច  $M$  និង  $N$  ស្ថិតលើជ្រុង  $AB$  និង  $AC$  រៀងគ្នា ដោយដឹងថា  $MB = BC = CN$  ។ តាង  $r$  និង  $R$  រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ចូរសរសេរកន្សោមផលធៀប  $\frac{MN}{BC}$  ជាអនុគមន៍នៃ  $R$  និង  $r$  ។

(Asian–Pacific Mathematical Olympiad 2005)

84. គេឱ្យ  $ABC$  ជាត្រីកោណមួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ហើយ  $\angle BAC = 60^\circ$  និង  $AB > AC$  ។ យក  $I$  ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង  $H$  ជាអរតូសង់នៃ  $\triangle ABC$  ចូរស្រាយថា  $2\angle AHI = 3\angle ABC$  ?

(Asian–Pacific Mathematical Olympiad 2007)

85. គេតាង  $G$  ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ  $ABC$  ហើយ  $M$  ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង  $BC$  ។ បន្ទាត់គូសចេញពី  $G$  ស្របនឹង  $BC$  កាត់  $AB$  ត្រង់  $X$  ហើយ គតាត់  $AC$  ត្រង់  $Y$  ។ សន្មតថា  $XC$  និង  $GB$  កាត់គ្នាត្រង់  $Q$  ហើយ  $YB$  និង  $GC$  កាត់គ្នាត្រង់  $P$  ។

ចូរស្រាយថាត្រីកោណ  $MPQ$  ដូចគ្នានឹងត្រីកោណ  $ABC$  ?

(Asian–Pacific Mathematical Olympiad 1991 )



86. លើជ្រុង  $AB$  និង  $BC$  នៃកាព  $ABCD$  គេដាក់ចំណុច  $E$  និង  $F$  រៀងគ្នា ដែល  $BE = BF$  ។ តាង  $N$  ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណ  $BCE$  ។ ចូរស្រាយថា  $\angle DNF = 90^\circ$  ?

(Austrian–Polish Mathematical Competition 1979)

87. រង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ  $ABC$  ប៉ះជ្រុង  $BC$  និង  $AC$  ត្រង់  $D$  និង  $E$  រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថាបើ  $AD = BE$  នោះ  $ABC$  ជាត្រីកោណសមបាត ?

(Austrian Mathematical Olympiad 2006)

88. ក្នុងត្រីកោណ  $ABC$  មួយគេយក  $E$  ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង  $AC$  និង  $F$  ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង  $BC$  ។ តាង  $G$  ជាចំណោលកែងពី  $C$  ទៅ  $AB$  ។ បង្ហាញថា  $\triangle EFG$  ជាត្រីកោណសមបាតលុះត្រាតែ  $\triangle ABC$  សមបាត ។

(Austrian Mathematical Olympiad 2008)

89. គេយក  $D, E$  និង  $F$  រៀងគ្នាជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង  $BC, CA$  និង  $AB$  នៃត្រីកោណ  $ABC$  ។ យក  $H_a, H_b, H_c$  ជាជើងនៃចំណោលកែងពី  $A, B, C$  ទៅជ្រុងឈមរៀងគ្នា ។ យក  $P, Q, R$  ជាចំណុចកណ្តាលនៃ  $H_b H_c, H_c H_a$  និង  $H_a H_b$  រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា  $PD, QE$  និង  $RF$  ប្រសព្វគ្នា ត្រង់ចំណុចមួយ ?

(Austrian Mathematical Olympiad 2009)

**ធនេយ៍មាត្រវិភាគក្នុងប្លង់**

---

90. ក្នុងចតុកោណប៉ោង **ABCD** មួយគេយក **E** ជាចំនុចប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូង ហើយ **S<sub>1</sub>**, **S<sub>2</sub>** និង **S** ជាផ្ទៃក្រឡានៃ **ABE**, **CDE** និង **ABCD** រៀងគ្នា ។ ចូរស្រាយថា  $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \leq \sqrt{S}$  ?

(Austrian Mathematical Olympiad 1990)

91. បញ្ចកោណប៉ោង **ABCDE** មួយចារឹកក្នុងរង្វង់ ។ ចម្ងាយពី **A** ទៅបន្ទាត់ **BC**, **CD**, **DE** ស្មើរៀងគ្នា **a**, **b**, **c** ។ ចូរគណនាចម្ងាយពីកំពូល **A** ទៅបន្ទាត់ (**BE**) ។

(Austrian Mathematical Olympiad 1990)

92. គេឱ្យត្រីកោណសមបាត **ABC** មួយដែល  $\angle A = 90^\circ$  ។ គេយក **M** ជាចំណុចកណ្តាលនៃ **AB** ។ បន្ទាត់មួយគូសចេញពី **A** ហើយកែង នឹង **CM** កាត់ជ្រុង **BC** ត្រង់ **P** ។ បង្ហាញថា  $\angle AMC = \angle BMP$  ?

(Baltic Way 2000)

93. គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានមុំ  $\angle A = 120^\circ$  ។ ចំណុច **K** និង **L** ស្ថិតនៅលើជ្រុង **AB** និង **AC** រៀងគ្នា ។ គេសង់ត្រីកោណសម័ង្ស **BKP** និង **CLQ** នៅក្រៅជ្រុងនៃត្រីកោណ **ABC** ។ ចូរស្រាយថា  $PQ \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + AC)$  ?

(Baltic Way 2000)

---

**ធនេយ៍មាត្រវិភាគក្នុងប្លង់**

---

94. ក្នុងត្រីកោណ  $ABC$  មួយគេឱ្យ  $2AB = AC + BC$  ។ ចូរស្រាយថាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង  $\triangle ABC$  ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ  $\triangle ABC$  ហើយចំណុចកណ្តាលនៃ  $AC$  និង  $BC$  ស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយ ។

(Problems for the Team Competition Baltic Way 1999)

95. គេឱ្យ  $ABC$  និង  $DAC$  ជាត្រីកោណសមបាតពីរដែលមានមុំកំពូល

$$\angle BAC = 20^\circ \text{ និង } \angle ADC = 100^\circ \text{ ។}$$

ចូរស្រាយថា  $AB = BC + CD$  ?

(Flanders Mathematical Olympiad 1996)

96. គេតាង  $R$  ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង  $r$  ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃ  $\triangle ABC$  មួយ ។

$S$  ជាចំនុចមួយនៅក្នុង  $\triangle ABC$  ហើយបន្ទាត់  $AS, BS, CS$  កាត់ជ្រុងឈមត្រង់  $X, Y, Z$  រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា 
$$\frac{BX \cdot CX}{AX^2} + \frac{CY \cdot AY}{BY^2} + \frac{AZ \cdot BZ}{CZ^2} = \frac{R - r}{r}$$

(Bosnia and Hercegovina Mathematical Olympiad 2000)

97. គេឱ្យត្រីកោណកែងមួយ  $ABC$  ដែល  $\angle ACB = 90^\circ$  ហើយយក  $CH$  ដែល

$H \in AB$  ជាកំពស់ចំពោះជ្រុង  $AB$  ហើយតាង  $P$  និង  $Q$  ជាចំណុចប៉ះរវាងរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ  $ABC$  ជាមួយជ្រុង  $AC$  និង  $BC$  រៀងគ្នា ។

បើ  $AQ \perp HP$  ចូរកំណត់ផលធៀប  $\frac{AH}{BH}$  ?

(Bulgarian Mathematical Olympiad 2006)

---

98. គេឱ្យចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់  $ABCD$  មួយ ។ បន្ទាត់  $AD$  និង  $BC$  ជួបគ្នា ត្រង់ចំណុច  $E$  ហើយអង្កត់ទ្រូង  $AC$  និង  $BD$  ជួបគ្នាត្រង់  $F$  ។  
បើ  $M$  និង  $N$  ជាចំណុចកណ្តាលនៃ  $AB$  និង  $CD$  នោះចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{MN}{EF} = \frac{1}{2} \left| \frac{AB}{CD} - \frac{CD}{AB} \right| \quad ។$$

(Bulgarian Mathematical Olympiad 1997)

99. បញ្ចកោណប៉ោង  $ABCDE$  មួយចារឹកក្នុងរង្វង់កាំ  $R$  ។ គេសំគាល់  $r_{XYZ}$  ជារង្វាស់កាំនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃ  $\triangle XYZ$  ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក.  $\cos \angle CAB + \cos \angle ABC + \cos \angle BCA = 1 + \frac{r_{ABC}}{R}$

ខ. បើ  $r_{ABC} = r_{AED}$  និង  $r_{ABD} = r_{AEC}$  នោះ  $\triangle ABC \cong \triangle AED$

(Bulgarian Mathematical Olympiad 1998)

100. គេឱ្យបន្ទាត់  $(\ell)$  កាត់ជ្រុង  $AC$  និង  $BC$  នៃត្រីកោណ  $ABC$  រៀងគ្នាត្រង់ ចំណុច  $E$  និង  $F$  ។

ចូរស្រាយថាបន្ទាត់  $(\ell)$  កាត់តាមផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ  $ABC$

$$\text{លុះត្រាតែ } BC \cdot \frac{AE}{CE} + AC \cdot \frac{BF}{CF} = AB \quad ។$$

(Bulgarian Mathematical Olympiad 1973)

---

**ធនធានមេត្រីកោណក្នុងម្ខាង**

---

101. គេតាង  $M$  ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ  $ABC$  មួយ ។

ចូរស្រាយថាវិសមភាព  $\sin \angle CAM + \sin \angle CBM \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$  ។

(Bulgarian Mathematical Olympiad 1997)

102. បើ  $a, b, c$  ជារង្វង់ និង  $R$  ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ  $ABC$

នោះបង្ហាញថា  $R \geq \frac{a^2 + b^2}{2\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}$  ។ តើសមភាពមាននៅពេលណា?

( Baltic Way 1998 )

103. គេឱ្យត្រីកោណ  $ABC$  មួយកែងត្រង់  $A$  ។  $D$  ជាចំណុចមួយលើជ្រុង  $BC$

ដែល  $\angle BDA = 2\angle BAD$  ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព  $\frac{1}{AD} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{BD} + \frac{1}{CD} \right)$  ( Baltic Way 1998 )

**រៀបរៀងដោយ លីម ឆន្ទ**

Tel: (017)768 246

ជំពូកទី២

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង  $BC = a$ ,  $AC = b$  និង  $AB = c$  ។

កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A កាត់ BC ត្រង់ L ។

ចូរស្រាយថា  $\frac{BL}{LC} = \frac{c}{b}$  រួចគណនា BL និង LC ជាអនុគមន៍នៃ a, b, c ។

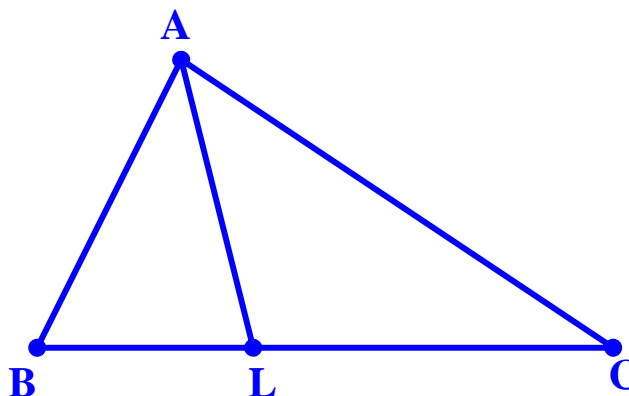
ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា  $\frac{BL}{LC} = \frac{c}{b}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស

$$\frac{AL}{\sin B} = \frac{BL}{\sin \frac{A}{2}} \quad (1)$$

$$\frac{AL}{\sin C} = \frac{LC}{\sin \frac{A}{2}} \quad (2)$$



ចែកសមីការ (1) & (2) អង្គ និង អង្គគេបាន  $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{BL}{LC}$  តែ  $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}$

ដូចនេះ  $\frac{BL}{LC} = \frac{c}{b}$  ។