លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១២

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2}$$

រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

រក្សាសិទ្ធិ

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១២

រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន
Tel: 017 768 246
www.mathtoday.wordpress.com

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក យ៉ង់ ឆារី
លោក លឹម ឆុន
លោក អ៊ឹង សំណាង

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការិយកុំព្យូទ័រ

លោកស្រី លី គុណ្ណាកា លោក អ៊ឹង សំណាង

អារម្ភកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រលាញ់រាប់អាន !
សៀវភៅ **លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍** ដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់អាននេះខ្ញុំបាទបានរៀបចំឡើងសម្រាប់ទុកជាឯកសារសម្រាប់អ្នកសិក្សាដែលមានបំណងចង់ចេះ លើផ្នែកនៃមេរៀននេះឲ្យបានកាន់តែច្បាស់ ។
នៅក្នុងសៀវភៅនេះរួមមាន មេរៀនសង្ខេប លំហាត់គំរូ និង លំហាត់អនុវត្តន៍សម្រាប់អ្នកសិក្សាហ្វឹកហាត់ដោះស្រាយដោយខ្លួនឯង។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅមួយក្បាលនេះ នឹងអាចចូលរួមផ្តល់នូវគំនិត និង វិធីសាស្ត្រថ្មីៗក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់ផ្នែក លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍ ចំពោះលោកអ្នកសិក្សាជាពុំខានឡើយ ។

ជាទីបញ្ចប់ខ្ញុំបាទសូមជូនពរចំពោះលោកអ្នក សូមមានសុខភាពល្អ មានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និង ទទួលបានជោគជ័យក្នុងគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី១៨ វិច្ឆិការ ឆ្នាំ២០១១
អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ
លឹម ផល្គុន
Tel : 017 768 246
Email: lim_phalkun@ymail.com
Website: www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី១

លីមីតនៃអនុគមន៍

១-លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនកំណត់

និយមន័យ១ ៖ អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត a បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x - a| < \delta$ នាំឲ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។ គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ។

ឧទាហរណ៍ ដោយប្រើនិយមន័យបង្ហាញថា $\lim_{x \to 2}(3x + 4) = 10$?

យើងត្រូវបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មាន $\delta > 0$ ដែល

$|(3x + 4) - 10| < \varepsilon$ កាលណា $0 < |x - 2| < \delta$ ។

គេបាន $|(3x + 4) - 10| < \varepsilon \Leftrightarrow |3(x - 2)| < \varepsilon$ គ្រប់ $\varepsilon > 0$

សមមូល $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$ យក $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ នោះ $|x - 2| < \delta$ ។

សម្រាយនេះបញ្ជាក់ថា $\varepsilon > 0$ មាន $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ ដែល $|x - 2| < \delta$

នាំឲ្យ $|(3x + 4) - 10| < \varepsilon$ ។ ដូចនេះ $\lim_{x \to 2}(3x + 4) = 10$ ។

និយមន័យ ២៖ អនុគមន៍ f ខិតទៅរក $+\infty$ ឬ $-\infty$ កាលណា x ខិតជិត a បើគ្រប់ចំនួន $M>0$ មានចំនួន $\delta>0$ ដែល $0<|x-a|<\delta$ នាំឲ្យ $f(x)>M$ ឬ $f(x)<-M$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ ឬ $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$

ចូរស្រាយតាមនិយមន័យថា $\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ ។

គេមាន $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}=\dfrac{2(x-2)+7}{x-2}=2+\dfrac{7}{x-2}$

យើងនឹងរកគចំនួន $M>0$ ដែល $f(x)>M$ ។

ដើម្បីឲ្យ $f(x)>M$ យើងគ្រាន់តែឲ្យ $\dfrac{7}{x-2}>M$ និង $x>2$

គេទាញបាន $0<x-2<\dfrac{7}{M}$ យក $\delta=\dfrac{7}{M}>0$ នោះ $0<x-2<\delta$

សម្រាយនេះបញ្ជាក់ថាគ្រប់ចំនួន $M>0$ មាន $\delta=\dfrac{7}{M}>0$

ដែល $0<|x-2|<\delta$ នាំឲ្យ $f(x)>M$ ។ដូចនេះ $\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

ចូរស្រាយបញ្ជាក់លីមីតខាងក្រោមតាមនិយមន័យ ៖

១/ $\lim_{x\to 3}(2x+1)=7$

២/ $\lim_{x\to -2}(x+5)=3$

៣/ $\lim_{x\to 2}(3x+2)=8$

៤/ $\lim_{x\to 1}(-2x+7)=5$

៥/ $\lim_{x\to 2}(x^2+1)=5$

៦/ $\lim_{x\to 1}(x^2+2x+4)=7$

៧/ $\lim_{x\to 1}\frac{3x+1}{x^2+1}=2$

៨/ $\lim_{x\to 2}\sqrt{x^3+1}=3$

៩/ $\lim_{x\to 2}(3^x+1)=10$

១០/ $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)=1$

១១/ $\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x}=+\infty$

១២/ $\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+1}{x-1}=+\infty$

១៣/ $\lim_{x\to 2^-}\frac{x+2}{x-2}=-\infty$

១៤/ $\lim_{x\to 1^-}\frac{3x}{x-1}=-\infty$

១៥/ $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-4x+5}{(x-1)^2}=+\infty$

១៦/ $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x}{x^2-4x+4}=-\infty$

១៧/ $\lim_{x\to 8}(\sqrt[3]{x}+1)=3$

១៨/ $\lim_{x\to 2}(x^3+2x)=12$

២-លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់អនន្ត

និយមន័យ១ ៖ អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតទៅ $+\infty$ ឬ $-\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $N > 0$ ដែល $x > N$ ឬ $x < -N$ នាំឲ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ ឬ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ ។

ឧទាហរណ៍ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{4x+1}{2x+3}$

ចូរស្រាយថា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ ។

គេមាន $f(x) = \dfrac{4x+1}{2x+3} = \dfrac{2(2x+3)-5}{2x+3} = 2 - \dfrac{5}{2x+3}$

នាំឲ្យ $|f(x) - 2| = \dfrac{5}{|2x+3|}$ ចំពោះ $|f(x) - 2| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$

គេបាន $\dfrac{5}{|2x+3|} < \varepsilon$ នាំឲ្យ $|2x+3| > \dfrac{5}{\varepsilon}$

គេទាញ $\left[\begin{array}{l} 2x+3 > \dfrac{5}{\varepsilon} \\ 2x+3 < -\dfrac{5}{\varepsilon} \end{array}\right.$ សមមូល $\left[\begin{array}{l} x > \dfrac{5}{2\varepsilon} - \dfrac{3}{2} \\ x < -\dfrac{5}{2\varepsilon} - \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

ហេតុនេះ គ្រប់ $\varepsilon > 0$ មាន $A = \frac{5}{2\varepsilon}$ ឬ $A = \frac{5}{2\varepsilon} + \frac{3}{2}$

ដែល $x > A$ ឬ $x < -A$ នាំឲ្យ $|f(x) - 2| < \varepsilon$

ដូចនេះ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ និង $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ ។

និយមន័យ២ ៖ អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតទៅ $+\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $M > 0$ មានចំនួន $N > 0$ ដែល $x > N$ នាំឲ្យ $f(x) > M$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ។

និយមន័យ៣ ៖ អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតទៅ $-\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $M > 0$ មានចំនួន $N > 0$ ដែល $x < -N$ នាំឲ្យ $f(x) > M$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

ចូរស្រាយបញ្ជាក់លីមីតខាងក្រោមតាមនិយមន័យ ៖

១/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{x+1}=3$

២/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3x}{x+2}=-3$

៣/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+2}{1-x}=-5$

៤/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x+1}{2x+1}=2$

៥/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$

៦/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8x+1}{1-4x}=-2$

៧/ $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+3)=-\infty$

៨/ $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x+3)=-\infty$

៩/ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+4)=+\infty$

១០/ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$

១១/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-x^2}{3x+5}=-\infty$

១២/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x+1}=-\infty$

១៣/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x+1}=0$

១៤/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7}{x+1}=0$

១៥/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x}{x^2+4x+5}=1$

១៦/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{(x-2)^2}=0$

៣-ប្រមាណវិធីលើលីមីត

បើ $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$ និង $\lim_{x\to a} h(x) = N$

ដែល L , M និង N ជាចំនួនពិតនោះគេបាន ៖

ក/ $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x) - h(x)] = L + M - N$

ខ/ $\lim_{x\to a}[\alpha f(x) + \beta g(x) - \gamma h(x)] = \alpha L + \beta M - \gamma N$

គ/ $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)h(x)] = L.M.N$

ឃ/ $\lim_{x\to a}[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{L}{M}$ ដែល $M \neq 0$

៤-លីមីតនៃអនុគមន៍អសនិទាន

រូបមន្ត ៖

1/ $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ ដែល $a \geq 0$ និង $n \in IN$, $n \geq 2$

2/ $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ ដែល $a < 0$ និង $n \in IN$, $n \geq 2$(ចំនួនគត់សេស)

3/ $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ ដែល $a \geq 0$ និង $n \in IN$, $n \geq 2$

ឧទាហរណ៍ គណនាលីមីត

១/ $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^3+1}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(x^3+1)}=\sqrt{2^3+1}=\sqrt{9}=3$

២/ $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+5x+3}{x+5}}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+5x+3}{x+5}}$

$$=\sqrt[3]{\frac{9+15+3}{5+3}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{3}{2}$$

៣/ $\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{x^3+4x}+\sqrt[3]{x^2+3x-2})$

$$=\sqrt{\lim_{x\to 2}(x^3+4x)}+\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}(x^2+3x-2)}$$

$$=\sqrt{8+8}+\sqrt[3]{4+6-2}=4+2=6$$

លំហាត់អនុវត្តន៍ ៖

គណនាលីមីត ៖

1/ $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-3x+4}{2x^2-x-1}}$

2/ $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{2x^2+7x+3}}$

3/ $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt[3]{\dfrac{x+4}{-7x+1}}$

4/ $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+2}}}$

៥-លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

បើ f និង g ជាអនុគមន៍ពីរដែលមានលីមីត $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$

និង $\lim\limits_{x\to L} f(x) = f(L)$ នោះ $\lim\limits_{x\to a} f[g(x)] = f(L)$ ។

ឧទាហរណ៍១ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 2} \ln(\frac{4x+7}{x+3})$

តាង $g(x) = \frac{4x+7}{x+3}$ និង $f(x) = \ln x$ នោះ $f[g(x)] = \ln(\frac{4x+7}{x+3})$

គេមាន $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{4x+7}{x+3} = \frac{8+7}{2+3} = 3$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 2} f[g(x)] = \lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) = \ln 3$ ។

ឧទាហរណ៍2 គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(\frac{4x+7}{x+3})$

តាង $g(x) = \frac{4x+7}{x+3}$ និង $f(x) = \ln x$ នោះ $f[g(x)] = \ln(\frac{4x+7}{x+3})$

គេមាន $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4x+7}{x+3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4+\frac{7}{x}}{1+\frac{3}{x}} = \frac{4}{1} = 4$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to +\infty} f[g(x)] = \lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} \ln x = \ln 4 = 2\ln 2$ ។

៦-លីមីតតាមការប្រៀបធៀប

1/ បើ f និង g ជាអនុគមន៍ពីរ ហើយ A ជាចំនួនពិតមួយដែល

ចំពោះ $\forall x \geq A : f(x) \geq g(x)$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

នោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ។

2/ បើ f និង g ជាអនុគមន៍ពីរ ហើយ A ជាចំនួនពិតមួយដែល

ចំពោះ $\forall x \geq A : f(x) \leq g(x)$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

នោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ។

3/ បើ f ,g និង h ជាអនុគមន៍បី ហើយ A ជាចំនួនពិតមួយដែល

$\forall x \geq A : g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lambda$

នោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$ ។ (λ ជាចំនួនពិត) ។

៤/ បើ f និង g ជាអនុគមន៍ពីរ ហើយ A ជាចំនួនពិតមួយដែល

$\forall x \geq A : f(x) \leq g(x)$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lambda'$

នោះ $\lambda \leq \lambda'$ ។ (λ និង λ' ជាចំនួនពិត) ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ដែល $f(x)=\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

គេមាន $f(x)=\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

ដោយគ្រប់ $x>0$ គេមាន $\sqrt{x+1}>\sqrt{x}$

នោះគេទាញ $2\sqrt{x}<\sqrt{x+1}+\sqrt{x}<2\sqrt{x+1}$

ឬ $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ឬ $\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}<\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\dfrac{1}{2}$ នោះ $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}<f(x)<\dfrac{1}{2}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\dfrac{1}{2}$ ។

៧-លីមីតរាងមិនកំណត់

ក/លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

វិធាន ៖ ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ គេត្រូវបំបែកភាគយក និង ភាគបែង ជាផលគុណកត្តា ហើយសម្រួលកត្តារួមចោល រួគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\frac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{\cos^2 x}$

គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$?

គេមាន $f(x)=\frac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{\cos^2 x}$

$$=\frac{(2\sin^2 x-2\sin x)-(\sin x-1)}{1-\sin^2 x}$$

$$=\frac{(\sin x-1)(2\sin x-1)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{1-2\sin x}{1+\sin x}$$

គេបាន $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-2\sin x}{1+\sin x}=\frac{1-2}{1+1}=-\frac{1}{2}$ ។

ខ/លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

វិធាន ៖ ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំនត់ $\frac{\infty}{\infty}$ គេត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេនៅភាគយក និង ភាគបែងជាកត្តារួមសិន ហើសម្រួលកត្តារួមចោល រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

ឧទាហរណ៍ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+1}+7x+2}{3x+1}$ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}+7x+2}{3x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x^2})}+x(7+\frac{2}{x})}{x(3+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+7+\frac{2}{x})}{x(3+\frac{1}{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+7+\frac{2}{x}}{3+\frac{1}{x}}=\frac{2+7}{3}=3$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ ។

គ/លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

វិធាន ៖ ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំនត់ $+\infty-\infty$ គេត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេ ជាកត្តារួមសិន ហើសម្រួលកត្តារួមចោល រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

ឧទាហរណ៍ គេមាន $f(x)=\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-3x+1}$

គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

មាន $f(x)=\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-3x+1}$

$$=\frac{\sqrt{(x^2+5x)^2}-\sqrt{(x^2-3x+1)^2}}{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-3x+1}}$$

$$=\frac{x^2+5x-x^2+3x-1}{\sqrt{x^2(1+\frac{5}{x})}+\sqrt{x^2(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}}$$

$$=\frac{x(8-\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}})}=\frac{8-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{8}{1+1}=4$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍ ៖

១-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+1}{2x+3}$

ខ/ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x+7}{12x-5}$

គ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+2x-1}{2e^x+1}$

ឃ/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+4x-1}{e^x+2x+3}$

ង/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{(2x+1)^2}{2x^2+3x}$

ច/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(4e^x+1)^2}{(2e^x+1)(e^x+x)}$

២-រកតម្លៃ **a** និង **b** ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-bx-1)=3$

ខ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(a-1)x^2+2bx+3}{ax+b}=4$

គ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+ax^2}-\sqrt[3]{bx^3-5x^2+1})=2$

៣-គេឲ្យពហុធា $P(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a,b,c\in IR$

កំណត់លេខមេគុណ a,b,c ដោយដឹងថា ៖

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{x^2+1}=2$ (i) និង $\lim\limits_{x\to1}\frac{P(x)}{x^2-1}=2$ (ii)

៨-លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ទ្រឹស្តីបទ ៖ បើ x ជារង្វាស់មុំ ឬ ធ្នូគិតជារ៉ាដ្យង់នោះគេបាន ៖

1/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 2/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$

3/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

សម្រាយបញ្ជាក់ ៖

តាង φ ជាមុំគិតជារ៉ាដ្យង់ ដែល $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$

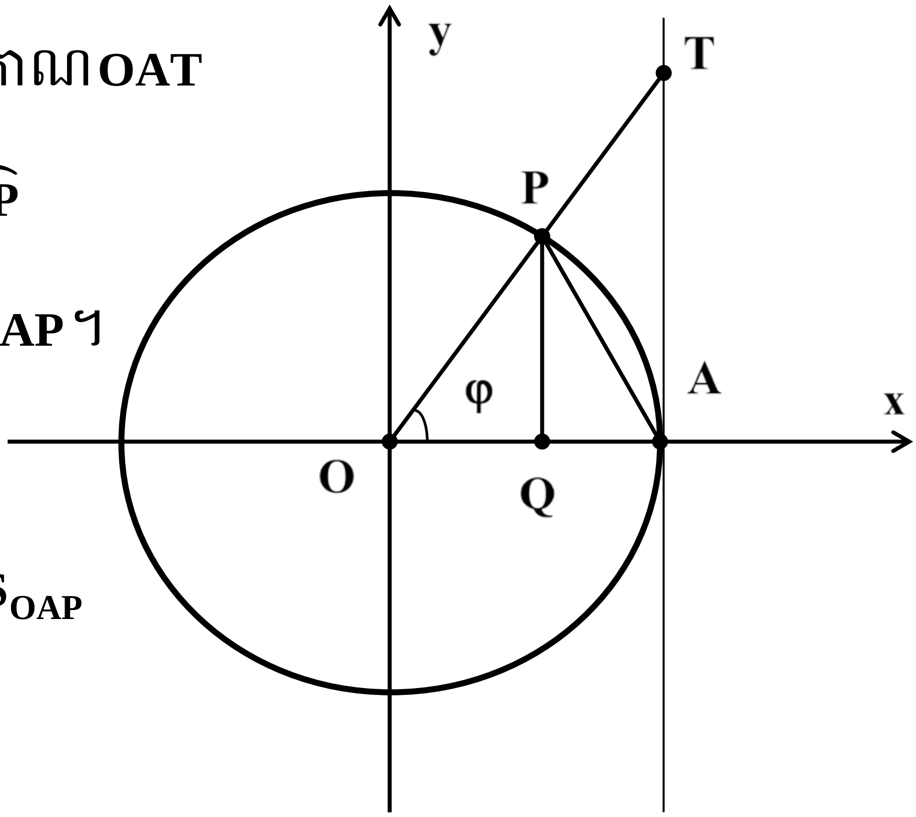
តាង S_{OAT} , $S_{\overset{\frown}{OAP}}$ និង S_{OAP}

រៀងគ្នាជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ OAT

ផ្ទៃក្រឡាចំរៀកថាស $O\overset{\frown}{AP}$

និង ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ OAP ។

តាមរូបខាងលើ



គេមាន $S_{OAT}\geq S_{O\overset{\frown}{AP}}\geq S_{OAP}$

ដោយ $S_{OAT}=\frac{1}{2}\times 1\times\tan\varphi$, $S_{\overset{\frown}{OAP}}=\frac{1}{2}\times 1^2\times\varphi$

និង $S_{OAP}=\frac{1}{2}\sin\theta$ នោះគេបាន $\frac{1}{2}\tan\varphi\geq\frac{1}{2}\varphi\geq\frac{1}{2}\sin\varphi$

ឬ $\tan\varphi\geq\varphi\geq\sin\varphi$ ដោយ $\tan\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ នោះ $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\geq\varphi\geq\sin\varphi$

គេទាញ $\cos\varphi\leq\frac{\sin\varphi}{\varphi}\leq 1$ ។

បើ $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$ នោះ $0<-\varphi<\frac{\pi}{2}$ នោះវិសមភាពខាងលើទៅជា

$\cos(-\varphi)\leq\frac{\sin(-\varphi)}{-\varphi}\leq 1$ ឬ $\cos\varphi\leq\frac{\sin\varphi}{\varphi}\leq 1$

ហេតុនេះគេបាន $\cos\varphi\leq\frac{\sin\varphi}{\varphi}\leq 1$ ចំពោះគ្រប់ $\varphi\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$

ដោយ $\lim\limits_{\varphi\to 0}\cos\varphi=1$ នោះ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\varphi}{\varphi}=1$ ។

ដោយជំនួស φ ជា x នោះគេបាន $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ពិត ។

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\frac{\sin x}{1+\cos x}=1\times 0=0$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$ ពិត ។

តាមរូបមន្ត $\tan x=\frac{\sin x}{x}$

គេបាន $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\cos x}=1\times1=1$

ដូចនេះ $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$ ។

សម្គាល់ ៖

1/ $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$

2/ $\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan x}=1$

ឧទាហរណ៍ ៖ គណនាលីមីត

1/ $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x+\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}+\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=0+1=1$

2/ $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\times1^2=\frac{1}{2}$

3/ $\lim_{x\to0}\frac{x+\tan x}{x+\tan 3x}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{\tan x}{x}}{1+\frac{\tan 3x}{3x}.3}=\frac{1+1}{1+3}=\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍ ៖

១-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\sin 3x}{x^2}$

2/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 2x}{x}$

3/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 6x}$

4/ $\lim_{x\to 0}\frac{3x+\sin x}{x+\sin x}$

5/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin 3x}{\sin^2 2x}$

6/ $\lim_{x\to 0}\frac{2x-\tan x}{x+\tan x}$

7/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{\sin x\sin 6x}$

8/ $\lim_{x\to 0}\frac{x+3\sin x}{\sin 2x}$

9/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x+\sin 2x}$

10/ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

11/ $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2-x\sin x}$

12/ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+\tan x}$

13/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$

14/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{x^2}$

15/ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 3x}{x^2}$

16/ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\sqrt{\cos 2x}}$

17/ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}$

18/ $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{1-\cos 2x}$

២-កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីបំពេញលក្ខខណ្ឌលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=8$

2/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=5$

3/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax+\sin(a+1)x}{x}=3$

4/ $\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos ax}{x^2}=4$

5/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+1)x+\sin(a-1)x}{x}=6$

៣-កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឲ្យ $\lim_{x\to 0}\frac{a+b\cos x}{x^2}=1$ ។

៤-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x^2-1}$

2/ $\lim_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi x}{2}$

3/ $\lim_{x\to \pi}\frac{1-\cos 2x}{(\pi-x)^2}$

4/ $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}$

5/ $\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos 2\pi x}{(1-x)^2}$

6/ $\lim_{x\to 2}\frac{1-\sin\frac{\pi x}{4}}{(2-x)^2}$

៥-កំណត់ ដើម្បីឲ្យបាន $\lim_{x\to 0}\frac{1+a\cos x+\cos 2x}{x^2}=b$

(a និង b ជាពីរចំនួនពិត) ។

៩-លីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

រូបមន្ត ៖

1/ $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

2/ $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

3/ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

4/ $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

5/ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

6/ $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = +\infty$

(ដែល **n** ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន) ។

១០-លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

រូបមន្ត ៖

1/ $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

2/ $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

3/ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

4/ $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

5/ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

6/ $\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$

(ដែល **n** ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន)។

លំហាត់គំរូ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6e^x+x}{2e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x(6+\frac{x}{e^x})}{e^x(2+\frac{1}{e^x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6+\frac{x}{e^x}}{2+\frac{1}{e^x}}=\frac{6}{2}=3$

2/ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2\ln x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)+\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=0+1=1$

3/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-\ln x}{x+\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(2-\frac{\ln x}{x})}{x(1+\frac{\ln x}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{\ln x}{x}}{1+\frac{\ln x}{x}}=\frac{2}{1}=2$

4/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}+3}{e^x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x}+3)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1)}=\frac{0+3}{0+1}=3$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ ។

5/ $\lim\limits_{x\to+\infty}[2x-\ln(2e^{2x}+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(e^{2x})-\ln(2e^{2x}+1)]$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\ln(\frac{e^{2x}}{2e^{2x}+1})]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln(\frac{1}{2+\frac{1}{e^{2x}}})=\ln\frac{1}{2}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍ ៖

១-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^x+3}{e^x+1}$

2/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4e^x+1}{2e^x-3}$

3/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2e^x-x+1}{e^x+2x+3}$

4/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+x}{3e^x+2x-1}$

5/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{(2e^x+1)(e^x-3)}$

6/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x+x}$

២-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $\lim\limits_{x\to0^+}(1+2x-x\ln x)$

2/ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}+\ln x}{\cot x}$

3/ $\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{1}{x}+\ln x)\sin x$

4/ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^x-1}{x\ln x}$

5/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$

6/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1-\ln x}{4x+1}$

7/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-\ln x}{x+\ln x}$

8/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+xe^x}{1+2xe^x}$

9/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}(2x+\ln x)$

10/ $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln x-\ln(2x+1)]$

១១-ការគណនាលីមីតរាងផ្សេងៗទៀតគួយល់ដឹង

ក-ការគណនាលីមីតដោយប្រើរូបមន្ត ៖

$$1/\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$2/\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad \text{ដែល } a>0 \text{ និង } a\neq 1 \text{ ។}$$

លំហាត់គំរូ គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$1/\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}=1\times 1=1$$

$$2/\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-(1-2\sin^2 x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$=1+2\times 1^2=3$$

$$3/\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)-(b^x-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}$$

$$=\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$$

ខ-ការគណនាលីមីតដោយប្រើរូបមន្ត ៖

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

លំហាត់គំរូ គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan 2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan 2x)}{\tan 2x}.\frac{\tan 2x}{2x}.2=1\times 1\times 2=2$

2/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-2\sin^2 x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2\sin^2 x)}{(-2\sin^2 x)}\times\frac{\sin^2 x}{x^2}\times(-2)=-2$$

3/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x-x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x-x^2)}{4x-x^2}\times\frac{4x-x^2}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x-x^2)}{4x-x^2}.(4-x)=1\times 4=4$$

4/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(3-2e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2(1-e^x)]}{2(1-e^x)}\times\frac{-2(e^x-1)}{x}=-2$

5/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[(1+ax)(1+bx)]}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)+\ln(1+bx)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}.a+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+bx)}{bx}.b=a+b$ ។

គ-ការគណនាលីមីតដោយប្រើរូបមន្ត ៖

1/ $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

2/ $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$ ដែល $e = 2.71828...$

លំហាត់គំរូ គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x/2}}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

2/ $$\lim_{x\to 0}\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}}\right]^{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

3/ $$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = \left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2} = e^{2}$$

4/ $$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x} = \lim_{x\to +\infty}\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right]^{\frac{-2x}{x+1}} = e^{-2} = \frac{1}{e^{2}}$$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍ ៖

១-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

1/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{2x}-2}{x}$

2/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{-\sin x}}{x}$

3/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin^2 x}-\cos 4x}{x^2}$

4/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{1-\cos 2x}}{x^2}$

5/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax^2}-e^{bx^2}}{2}$

6/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2-2x}-e^{x^2+2x}}{x}$

7/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}+e^{2x}-2}{x^2}$

8/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan^2 x}-e^{\sin^2 x}}{1+x\sin 2x-\cos 2x}$

9/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+e^{x^2}}}{\sin^2 x}$

10/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{2-e^{x^2}}-1}{x^2}$

២-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2\tan 3x)}{\sin x}$

2/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-e^{\sin^2 x})}{x\tan x}$

3/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)+\ln(\cos 2x)}{x^2}$

4/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3-3x+3)}{(x-1)^2}$

៣-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+}\right)^{\frac{2}{x}}$

2/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$

3/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{x}{x-\sin x}}$

4/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x^2+x+3}{x+3}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

5/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$

6/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$

7/ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x+3}{x+4}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

8/ $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x-2}}$

9/ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\tan x\right)^{\tan 2x}$

10/ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{(\pi-x)^2}}$

11/ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^{\frac{x}{(1-x)^2}}$

12/ $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$

13/ $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-3x+4}\right)^{x}$

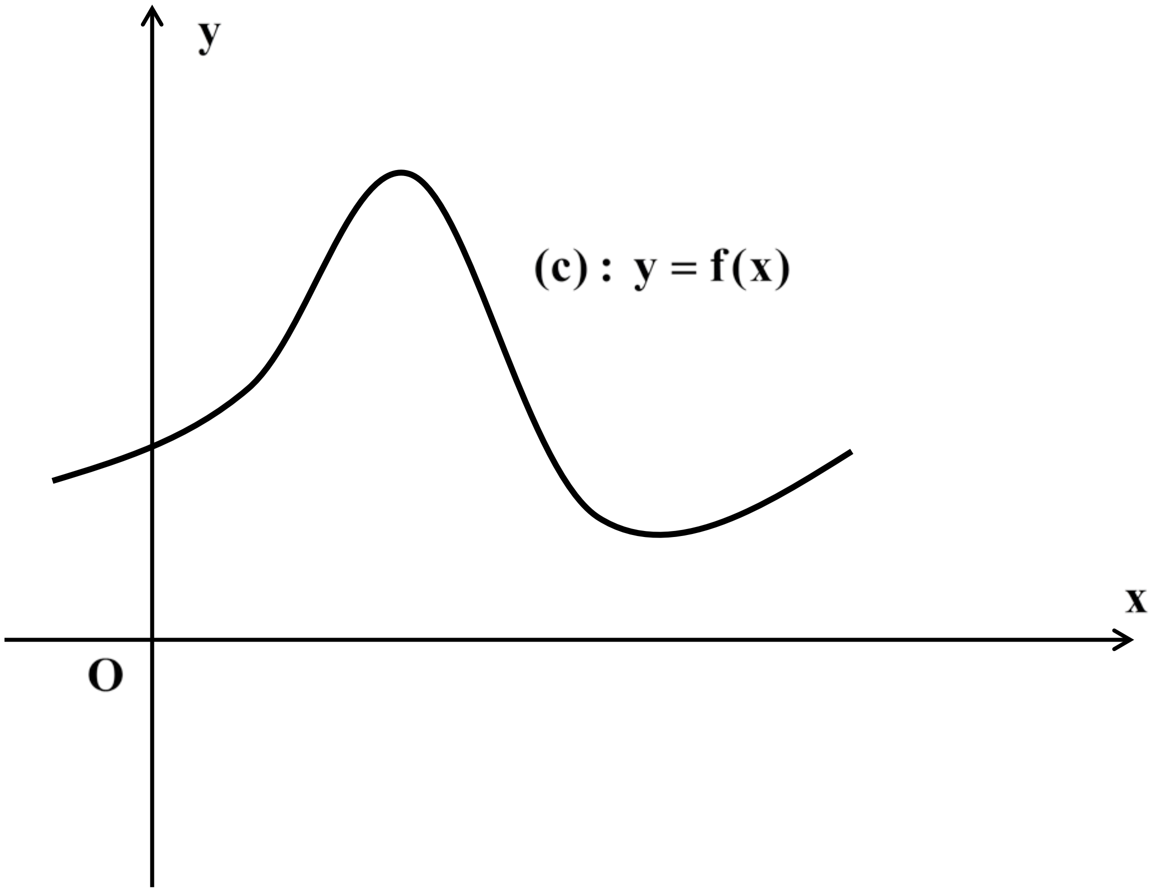
14/ $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{e^x+x}{e^x+1}\right)^{e^x}$

ជំពូកទី២

ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

១-សញ្ញាណនៃអនុគមន៍ជាប់

កាលណាគេគូសក្រាបនៃធនុគមន៍ $y = f(x)$ លើចន្លោះ I មួយនៃដែនកំណត់ ដោយមិនលើកខ្មៅដៃ នោះគេបានគំនូស ជាខ្សែកោងជាប់ គេថាអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់គ្រប់ចំណុចនៃចន្លោះ I ។



២-ភាពជាប់ត្រង់មួយចំណុច

និយមន័យ អនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = a$ កាលណា f បំពេញលក្ខខណ្ឌទាំងបីខាងក្រោម ៖

1/ f កំណត់ចំពោះ $x = a$

2/ f មានលីមីតកាលណា x ខិតជិត a

3/ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ។

ឧទាហរណ៍១ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

តើអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = 2$ ឬទេ ?

ចំពោះ $x = 2$ គេបាន $f(2) = \sqrt{2^3 + 1} = \sqrt{9} = 3$ កំណត់

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \sqrt{x^3 + 1} = \sqrt{2^3 + 1} = 3$$

គេបាន $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = 2$ ។

ឧទាហរណ៍២

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+2x+6} & \text{បើ} \quad x \geq 1 \\ \dfrac{2x-11}{x-2} & \text{បើ} \quad x < 1 \end{cases}$$

តើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 1$ ឬទេ ?

ចំពោះ $x = 1$ គេបាន $f(2) = \sqrt{1^2+2+6} = \sqrt{9} = 3$ កំណត់

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x^2+2x+6} = \sqrt{1+2+6} = 3$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x-5}{x-2} = \frac{2-5}{1-2} = 3$$

ដោយ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$

នោះ $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 3$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = 2$ ។

ឧទាហរណ៍៣

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{1+x} & \text{បើ } x\geq 0\\ \dfrac{2\sqrt{x^2}-\sin x}{x} & \text{បើ } x<0\end{cases}$$

តើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ឬទេ ?

ចំពោះ $x=0$ គេបាន $f(0)=\dfrac{1-0}{1+0}=1$ កំណត់

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x}{1+x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sqrt{x^2}-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2|x|-\sin x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2x-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(-2-\frac{\sin x}{x}\right)=-3$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ នោះ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ គ្មានលីមីត ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ចំណុច $x=0$ ។

ឧទាហរណ៍៤

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-2\cos 2ax}{x^2} & \text{បើ} \quad x \neq 0 \\ 9 & \text{បើ} \quad x = 0 \end{cases}$$

កំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ។

ចំពោះ $x = 0$ គេបាន $f(0) = 9$ កំណត់

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos 2ax}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\sin^2 ax}{x^2} = 4a^2 \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2 = 4a^2$$

ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = 0$ គេគ្រាន់តែឲ្យ

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ ឬ $4a^2 = 9$ នោះ $a = \pm \dfrac{3}{2}$ ។

ដូចនេះ $a = \pm \dfrac{3}{2}$ ។

៣-លក្ខណៈភាពជាប់នៃអនុគមន៍

បើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=a$ នោះគេបាន ៖

1/ $f(x)+g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ ចំណុច $x=a$ ។

2/ $f(x)-g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ ចំណុច $x=a$ ។

3/ $f(x).g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ ចំណុច $x=a$ ។

4/ $\lambda f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ ចំណុច $x=a$ ។ (λ ជាចំនួនពិត)

5/ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ ចំណុច $x=a$ ដែល $g(a)\neq 0$ ។

៤-ភាពជាប់លើចន្លោះ

និយមន័យ ៖

1/អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបើក (a,b) លុះត្រាតែ f ជាប់ចំពោះ

គ្រប់តម្លៃ x នៃចន្លោះបើកនោះ ។

2/អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ [a,b] លុះត្រាតែ f ជាប់លើ (a,b)

និងមានលីមីត $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ និង $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$ ។

ឧទាហរណ៍ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=\begin{cases} 1+x\ln x & \text{បើ } x>0 \\ 1 & \text{បើ } x=0 \\ \dfrac{\sin\pi}{1-x} & \text{បើ } x<1 \\ \pi & \text{បើ } x=1 \end{cases}$$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f លើចន្លោះ $[0,1]$ ។

យើងពិនិត្យឃើញថា f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $(0,1)$ ។

គេមាន $f(0)=1$ និង $f(1)=\pi$

ហើយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x\ln x)=1=f(0)$

និង $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sin\pi x}{1-x}$

តាង $1-x=t$ នោះ $x=1-t$

ហើយកាលណា $x\to 1^-$ នោះ $t\to 0^+$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin(\pi-\pi t)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin(\pi t)}{(\pi t)}.\pi=\pi=f(1)$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះ $[0,1]$ ។

៥-ភាពជាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់

អនុគមន៍ g ជាប់ត្រង់ $x=a$ និងអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=g(a)$ នោះអនុគមន៍បណ្តាក់ $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$ ជាប់ត្រង់ $x=a$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$ និង $f(x)=\ln x$ ។

តើអនុគមន៍ $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$ ជាប់ត្រង់ $x=1$ ដែរឬទេ ?

គេមាន $g(1)=\dfrac{4}{1^2+1}=2$

ហើយ $\lim\limits_{x\to1}g(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x}{x^2+1}=\dfrac{4}{1+1}=2=g(1)$ នោះ g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=1$ ។

ហើយបើ $x=g(1)=2$ នោះ $f(2)=\ln 2$

និង $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\ln x=\ln=f(2)$ នោះf ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=2$

សម្រាយខាងលើបញ្ជាក់ថា $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$ ជាប់ត្រង់ $x=1$ ។

៦-អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់

បើ f ជាអនុគមន៍មិនកំណត់ត្រង់ $x=a$ និងមានលីមីត $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lambda$ នោះអនុគមន៍បន្លាយនៃ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $x=a$ កំណត់ដោយ ៖

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{បើ } x\neq a \\ \lambda & \text{បើ } x=a \end{cases}$$

ឧទាហរណ៍១ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=0$ ។

គេមាន $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ ដោយ $\sin x=\tan x.\cos x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x.\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}.\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3} & \text{បើ } x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{បើ } x=0 \end{cases}$

ឧទាហរណ៍២

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{\sin x+x^2\ln|x|}{x}$ ដែល $x\neq 0$ ។

តើ f អាចមានអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់ ត្រង់ $x=0$ ឬទេ ?

បើមានចូរកំណត់រកអនុគមន៍នោះ ។

គេមាន $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^2\ln|x|}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\ln|x|\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+\lim_{x\to 0}(x\ln|x|)=1+0=1$$

ដូចនេះ f អាចមានអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប ត្រង់ $x=0$ ហើយបើ

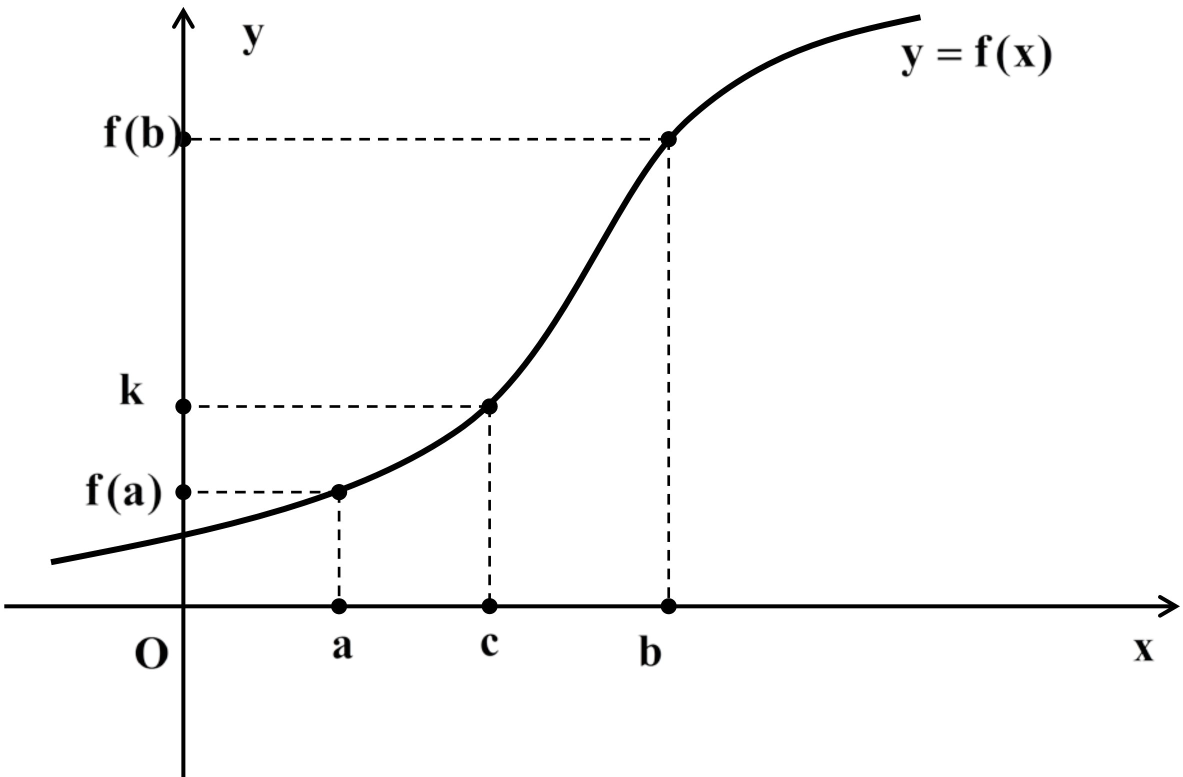
g ជាបន្លាយនៃអនុគមន៍ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $x=0$ នោះគេបាន ៖

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x+x^2\ln|x|}{x} & \text{បើ } x\neq 0\\ 1 & \text{បើ } x=0\end{cases}$$

៧-ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល

ទ្រឹស្តីបទ ៖ បើអនុគមន៍ **f** ជាប់លើចន្លោះបិទ **[a,b]** និង **k** ជាចំនួនមួយនៅចន្លោះ **f(a)** និង **f(b)** នោះមានចំនួនពិត **c** មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ **[a,b]** ដែល $f(c) = k$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ ៖



អនុគមន៍ **f** ជាប់ និង កើនដាច់ខាត លើចន្លោះបិទ**[a,b]** ។

f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត មានន័យថាមានពីរចំនួន α , β នៃ**[a,b]**

ដែល $\alpha < \beta$ នាំឲ្យ $f(\alpha) < f(\beta)$ ។ ឲ្យចំនួន k នៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$

($f(a) < k < f(b)$) និង f ជាអនុគមន៍ជាប់ តាមទ្រឹស្តីបទបញ្ជាក់ថាមាន

ចំនួន c នៅចន្លោះ a និង b ដែល $f(c) = k$ ។

ឧបមាថាមានចំនួន c' មួយទៀតផ្សេងពី c ដែល $f(c') = k$ នោះគេបាន

$f(c) = f(c')$ ដែលផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែលថា f ជាងនុគមន៍កើនដាច់ខាត

ដូចនេះមានចំនួន c តែមួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(c) = k$ មានន័យថា

សមីការ $f(x) = k$ មានចម្លើយតែមួយគត់ ។

វិបាក ៖ បើអនុគមន៍ f ជាប់ហើយកើនដាច់ខាត ឬ ចុះដាច់ខាតលើ

ចន្លោះបិទ $[a,b]$ នោះចំពោះគ្រប់ចំនួន k នៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$

សមីការ $f(x) = k$ មានចម្លើយតែមួយគត់នៅចន្លោះ $[a,b]$ ។

សម្គាល់ ៖ ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលអាចប្រើបានចំពោះ $k = 0$ ជាពិសេស

បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និង $f(a).f(b) < 0$ នោះ

មានចំនួន c មួយយ៉ាងតិចនៃ $[a,b]$ ដែល $f(c) = 0$ ។

ឧទាហរណ៍

ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $\mathbf{x\tan x = \cos x}$ យ៉ាងហោច

ណាស់មានឬសជាចំនួនពិតមួយនៅចន្លោះ $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ ។

តាង $\mathbf{f(x) = x\tan x - \cos x}$

គេមាន $\mathbf{f(0) = 0 - 1 = -1 < 0}$

និង $\mathbf{f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4} = \frac{3.14 - 2\times 1.41}{4} = \frac{0.32}{4} = 0.80 > 0}$

គេបាន $\mathbf{f(0).f(\frac{\pi}{4}) < 0}$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោច

ណាស់មានចំនួនពិត $\mathbf{c}$ មួយនៃចន្លោះ $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ ដែល $\mathbf{f(c) = 0}$ ។

ដូចនេះថាសមីការ $\mathbf{x\tan x = \cos x}$ យ៉ាងហោចណាស់មានឬសជា

ចំនួនពិតមួយនៅចន្លោះ $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

1/គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x^3} & \text{បើ}\quad x\neq 0\\ -1 & \text{បើ}\quad x=0\end{cases}$$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច $x=0$ ។

2/គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2} & \text{បើ}\quad x\neq 0\\ 1 & \text{បើ}\quad x=0\end{cases}$$

តើអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=0$ ដែរឬទេ ?

3/គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2\sin^2 x)}{x^2} & \text{បើ}\quad x\neq 0\\ 2 & \text{បើ}\quad x=0\end{cases}$$

ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=0$ ។

4/គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos ax}{x^2} & \text{បើ } x \neq 0 \\ 8 & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$$

ចូរកំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=0$ ។

5/គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \begin{cases} x^2+ax+2 & \text{បើ } x \leq 1 \\ (x+a)^2 & \text{បើ } x > 1 \end{cases}$$

ចូរកំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=1$ ។

6/រកតម្លៃ A ដែលនាំឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងករណីនីមួយៗ

ក/ $f(x) = \begin{cases} Ax-3 & \text{បើ } x < 2 \\ 3-x+2x^2 & \text{បើ } x \geq 2 \end{cases}$

ខ/ $f(x) = \begin{cases} 1-3x & \text{បើ } x < 4 \\ Ax^2+2x-3 & \text{បើ } x \geq 4 \end{cases}$

គ/ $f(x) = \begin{cases} x^2+Ax+2 & \text{បើ } x \leq 1 \\ \dfrac{\sin \pi x}{\pi - \pi x} & \text{បើ } x > 1 \end{cases}$

7/ចូររកអនុគមន៍បន្លាយនៃ f តាមភាពជាប់ត្រង់ចំណុច $x = a$ ក្នុងករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម ៖

ក/ $f(x) = \dfrac{1 - \cos x \cos 2x}{x^2}$ ត្រង់ចំណុច $x = 0$ ។

ខ/ $f(x) = \dfrac{e^{x^2 - 3x + 2} - 1}{x - 2}$ ត្រង់ចំណុច $x = 2$ ។

គ/ $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 - 6x + 10)}{(x - 3)^2}$ ត្រង់ចំណុច $x = 3$ ។

ឃ/ $f(x) = \dfrac{\sin \pi x}{1 - x^3}$ ត្រង់ចំណុច $x = 1$ ។

ង/ $f(x) = \dfrac{1 + \cos x}{(\pi - x)^2}$ ត្រង់ចំណុច $x = \pi$ ។

8/គេមានអនុគមន៍ $y = f(x)$ កំណត់លើចន្លោះ $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ដោយដឹងថា ៖

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \dfrac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin x} & \text{បើ } x \neq 0 \\ \sqrt{2} & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$$

តើអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = 0$ ឬទេ ?

9/ គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $ax^2+bx+c=0$ ដែល $a\neq 0$ ។

គេដឹងថាលេខមេគុណ a,b,c ផ្ទៀងផ្ទាត់ $2a+3b+6c=0$ ។

ចូរបង្ហាញថាសមីការនេះមានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅក្នុង $\left[0,\frac{2}{3}\right]$ ។

10/ ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $(x^n-1)\cos x+\sqrt{2}\sin x-1=0$

យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយនៅចន្លោះ $[0,1]$ ។

11/ រកតម្លៃ A និង B ដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=\begin{cases} Ax^2+5x-9 & \text{បើ } x<1 \\ B & \text{បើ } x=1 \\ (3-x)(A-2x) & \text{បើ } x>1 \end{cases}$$

ជាអនុគមន៍ជាប់លើ IR ។

12/ គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\cos\pi x}{1-2x}$ ដែល $x\neq\dfrac{1}{2}$

ក-ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ ។

ខ-តើf អាចមានអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប ត្រង់ $x=\dfrac{1}{2}$ ឬទេ ?

ជំពូកទី៣

លំហាត់មានដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{a + b\cos x}{x^2}$ ដែល $x \neq 0$

ចូរកំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $\lim_{x\to 0} f(x) = 4$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ a និង b ៖

គេមាន $f(x) = \frac{a + b\cos x}{x^2}$ ដោយ $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$

នោះ $f(x) = \frac{a + b(1 - 2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2} = \frac{(a + b) - 2b\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

គេបាន $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(a + b) - 2b\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

ដើម្បីឲ្យបាន $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 4$ គេត្រាន់តែឲ្យ $a + b = 0$

និង $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2b\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 4$ ឬ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2} \times (-\frac{b}{2}) = 8$

នាំឲ្យ $-\dfrac{b}{2} = 4$ ឬ $b = -8$ ហើយ $a + b = 0$ នោះ $a = 8$ ។

ដូចនេះ $a = 8$, $b = -8$ ។

លំហាត់ទី២

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$ ខ. $\lim_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{n}{1-x^n})$

គ. $\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$ ដែល m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right]=\lim_{x\to1}\left[\frac{(1+x+x^2)-3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right]$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+(x^2-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+(x-1)(x+1)}{-(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1+(x+1)}{-(x^2+x+1)}=\frac{1+2}{-3}=-1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=-1}$ ។

ខ. $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{n}{1-x^n})$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{n}{(1-x)(1+x+...+x^{n-1})}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1+x+...+x^{n-1})-n}{(1-x)(1+x+....+x^{n-1})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+....+(x^{n-1}-1)}{-(x-1)(1+x+...+x^{n-1})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+......+(x-1)(x^{n-2}+....+x+1)}{-(x-1)(1+x+.....+x^{n-1})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+.....+(x^{n-2}+....+x+1)}{-(1+x+.....+x^{n-1})}$$

$$=\frac{1+2+.....+(n-1)}{-n}=-\frac{n-1}{2}$$

គ. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{n}{1-x^n}\right)-\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{m}{1-x^m}\right)$$

$$=\left(-\frac{n-1}{2}\right)-\left(-\frac{m-1}{2}\right)=\frac{-n+1+m-1}{2}=\frac{m-n}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\frac{m-n}{2}}$ ។

លំហាត់ទី៣

គណនាលីមីត ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(3x+1)}{x^2}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-(nx+1)}{x^2}$, $n\in IN$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(3x+1)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+3x+3x^2+x^3-3x-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+x^3}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(3+x\right)=3$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(3x+1)}{x^2}=3}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-(nx+1)}{x^2}$, $n\in IN$

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុន ៖

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2 + C_n^3x^3 + ... + C_n^n x^n - nx - 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{n(n-1)}{2}x^2 + C_n^3x^3 + ... + C_n^n x^n}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{n(n-1)}{2} + C_n^3 x + ... + C_n^n x^{n-2}\right] = \frac{n(n-1)}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-(nx+1)}{x^2} = \dfrac{n(n-1)}{2}}$ ។

លំហាត់ទី៤

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}$

ខ. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$, $n \in IN$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(3x^4 - 3x^3) - (x^3 - 1)}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3x^3(x-1) - (x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3x^3 - x^2 - x - 1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^3 - x^2) + (x^3 - x) + (x^3 - 1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2(x-1) + x(x-1)(x+1) + (x-1)(x^2 + x + 1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \left[x^2 + x(x+1) + (x^2 + x + 1) \right] = 1 + 2 + 3 = 6$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2} = 6}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^{n}+1}{(x-1)^{2}}$, $n\in IN$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{nx^{n}(x-1)-(x-1)(x^{n-1}+....+x^{2}+x+1)}{(x-1)^{2}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^{n}-x^{n-1})+....+(x^{n}-x)+(x^{n}-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{n-1}(x-1)+...+x(x-1)(x^{n-2}+...+x+1)+(x-1)(x^{n-1}+...+x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[x^{n-1}+....+x(x^{n-2}+...+x+1)+...(x^{n-1}+...+x+1)\right]$$

$$=1+2+....+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^{n}+1}{(x-1)^{2}}=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ។

លំហាត់ទី៥

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$A=\lim_{x\to 2}\left(\sqrt[6]{\frac{6x^4-12x^3-x+2}{x+2}}\times\frac{\sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^2+60}}}{\sqrt{x^2-\sqrt[3]{x^2+60}}}\right)$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$A=\lim_{x\to 2}\left(\sqrt[6]{\frac{6x^4-12x^3-x+2}{x+2}}\times\frac{\sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^2+60}}}{\sqrt{x^2-\sqrt[3]{x^2+60}}}\right)$$

$$U=6x^4-12x^3-x+2$$

$$=6x^3(x-2)-(x-2)=(x-2)(6x^3-1)$$

$$V=x^3-\sqrt{x^2+60}=\frac{x^6-x^2-60}{x^3+\sqrt{x^2+60}}$$

$$=\frac{W}{x^3+\sqrt{x^2+60}}$$

ដែល $W=x^6-x^2-60=(x^6-64)-(x^2-4)$

$$= (x^2-4)(x^4+4x^2+16)-(x^2-4)$$
$$= (x-2)(x+2)(x^4+4x^2+15)$$

$$T = x^2 - \sqrt[3]{x^2+60} = \frac{x^6-x^2-60}{x^4+x^2\sqrt[3]{x^2+60}+\sqrt[3]{(x^2+60)^2}}$$

$$= \frac{W}{x^4+x^2\sqrt[3]{x^2+60}+\sqrt[3]{(x^2+60)^2}}$$ ។

$$A = \lim_{x\to 2}\left(\sqrt[6]{\frac{U}{x+2}}\times\frac{\sqrt[3]{V}}{\sqrt{T}}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\sqrt[6]{\frac{U}{x+2}\cdot\frac{V^2}{T^3}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\sqrt[6]{\frac{(x-2)(6x^3-1)}{x+2}\cdot\frac{W^2}{(x^3+\sqrt{x^2+60})^2}\frac{(x^4+x^2\sqrt[3]{x^2+60}+\sqrt[3]{(x^2+60)^2})^3}{W^3}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\sqrt[6]{\frac{(x-2)(6x^3-1)(x^4+x^2\sqrt[3]{x^2+60}+\sqrt[3]{(x^2+60)^2})^3}{(x+2)(x^3+\sqrt{x^2+60})^2(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+15)}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\sqrt[6]{\frac{(6x^3-1)(x^4+x^2\sqrt[3]{x^2+60}+\sqrt[3]{(x^2+60)^2})^3}{(x+2)^2(x^3+\sqrt{x^2+60})^2(x^4+4x^2+15)}}\right) = \sqrt[6]{\frac{47.48^3}{16.16^2.47}} = \sqrt{3}$$

ដូចនេះ $A = \sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៦

គណនាលីមីត $A=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^4+1}}{x-1+\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}$

ដំណោះស្រាយ

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^4+1}}{x-1+\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)+\frac{x^3+1-x^4-1}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+1}}}{(x-1)+\frac{x+1-x^2-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)-\frac{x^3(x-1)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+1}}}{(x-1)-\frac{x(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)[x+1-\frac{x^3}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+1}}]}{(x-1)(1-\frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-\frac{x^3}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+1}}}{1-\frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}}}=\frac{2-\frac{1}{2\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{7+3\sqrt{2}}{2}$$

លំហាត់ទី៧

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោមនេះ

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 2x}{x\sin x}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{3\sin x-\sin 3x}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{1-\cos 2x\cos 4x}$

ង. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

ច. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\sqrt{\cos 2x}}$

ជ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{x.\tan x}$

ឈ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2}-\cos x}{\sqrt{\cos x-\sqrt{\cos 3x}}}$

ញ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 2x}{x\sin x}$

តាមរូបមន្ត $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x+\cos^2 2x)}{x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x(1+\cos 2x+\cos^2 2x)}{x\sin x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\lim_{x\to 0}(1+\cos 2x+\cos^2 2x) = 2.1.3 = 6$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 2x}{x\sin x} = 6}$ ។

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

ដោយ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = \cos x.\tan x$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\cos x.\tan x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\tan x\sin^2\frac{x}{2}}{x^3}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2.1.\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{2}}$ ។

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{3\sin x-\sin 3x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-2\sin x\cos x}{3\sin x-(3\sin x-4\sin^3 x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x(1-\cos x)}{4\sin^3 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin x\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2.\frac{1}{4}.\frac{x^2}{\sin^2 x}\right]=1^2.\frac{1}{4}.1^2=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{3\sin x-\sin 3x}=\frac{1}{4}}$ ។

ឃ. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{1-\cos 2x\cos 4x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 4x)-(1-\cos 2x)}{(1-\cos 2x)+\cos 2x(1-\cos 4x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x-2\sin^2 x}{2\sin^2 x+2\cos 2x\sin^2 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x-\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos 2x\sin^2 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 2x}{x^2}-\frac{\sin^2 x}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}+\cos 2x.\frac{\sin^2 2x}{x^2}}=\frac{4-1}{1+4}=\frac{3}{5}$$

ង. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2\sin^2\frac{x}{2})}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(\sin^2\frac{x}{2})}{x^4}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(\sin^2\frac{x}{2})}{(\sin^2\frac{x}{2})^2}.\frac{\sin^4\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^4}.\frac{1}{16}=2.\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\dfrac{1}{8}}$ ។

ច. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\sin^2 x}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}.\frac{1}{4}+2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}.\frac{\cos x}{1+\sqrt{\cos 2x}}=2$$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\sqrt{\cos 2x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos 2x}.\frac{1+\sqrt{\cos 2x}}{1+\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin^2 x}.\frac{1+\sqrt{\cos 2x}}{1+\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}.\frac{x^2}{\sin^2 x}.\frac{1}{4}.\frac{1+\sqrt{\cos 2x}}{1+\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\sqrt{\cos 2x}}=\dfrac{1}{4}}$ ។

ជ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{x.\tan x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-1-\cos x}{x\tan x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\tan x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\tan x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}.\frac{x}{\tan x}.\frac{1}{4}.\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

ឈ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2}-\cos x}{\sqrt{\cos x-\sqrt{\cos 3x}}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos x-\cos 3x}\cdot\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 3x}}{\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+(1-\cos^2 x)}{2\sin\frac{x+3x}{2}\sin\frac{x-3x}{2}}\cdot\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 3x}}{\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{2\sin 2x.\sin(-x)}\cdot\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 3x}}{\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 3x}}{\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x}=-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2}-\cos x}{\sqrt{\cos x-\sqrt{\cos 3x}}}=-\dfrac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៨

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sin\frac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi^2-4x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin x}}{\cos^2 x}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1+\tan\pi x}{1-x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}(4-x^2)\tan\dfrac{\pi x}{4}$

7. $\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-x)\tan\dfrac{x}{2}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan\frac{\pi}{x}}{1-x^2}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sin\frac{2\pi}{x+3}}{(1-x)^2}$

10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{1-\sqrt{2}\sin x}$

11. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\pi-3x}{\sqrt{3}-2\sin x}$

12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\cos\frac{\pi}{x}}$

13. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x-2)\tan\dfrac{\pi}{x}$

14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3}{\cos\frac{\pi}{x+1}}$

15. $\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)^2}{1-\sin\frac{\pi}{x}}$

18. $\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\sin\frac{2\pi}{x}}$

16. $\lim_{x\to \pi}\frac{\cos\frac{\pi x}{x+\pi}}{\pi-x}$

19. $\lim_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi x}{x+1}$

17. $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\cos\frac{\pi x}{x+3}}$

20. $\lim_{x\to 2}(2x-x^2)\cot\frac{2\pi}{x}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sin\frac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$

តាង $x=1-z$ កាលណា $x\to 1$ នោះ $z\to 0$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi z}{2})}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos\frac{\pi z}{2}}{z^2}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\pi z}{4}}{z^2}=2\lim_{z\to 0}\frac{\sin^2\frac{\pi z}{4}}{(\frac{\pi z}{4})^2}.\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{8}$$

2. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi^2 - 4x^2}$

តាង $z = \frac{\pi}{2} - x$ នាំឱ្យ $x = \frac{\pi}{2} - z$ កាលណា $x \to \frac{\pi}{2}$ នោះ $z \to 0$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - z)}{\pi^2 - 4(\frac{\pi}{2} - z)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\pi^2 - \pi^2 + 4\pi z - 4z^2}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{4\pi z - 4z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} . \frac{1}{4\pi - 4z} = \frac{1}{4\pi}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi^2 - 4x^2} = \frac{1}{4\pi}}$ ។

3. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$ តាង $x = \frac{\pi}{4} - z$ កាលណា $x \to \frac{\pi}{4}$ នោះ $z \to 0$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - z) - \cos(\frac{\pi}{4} - z)}{\pi - 4(\frac{\pi}{4} - z)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos z - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin z) - (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos z + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin z)}{4z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-\sqrt{2}\sin z}{4z} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin x}}{\cos^2 x}$

តាង $x=\dfrac{\pi}{2}-z$ កាលណា $x\to\dfrac{\pi}{2}$ នោះ $z\to 0$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin(\frac{\pi}{2}-z)}}{\cos^2(\frac{\pi}{2}-z)}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos z}}{\sin^2 z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2-1-\cos z}{\sin^2 z.(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos z})}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin^2 z(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos z})}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin^2\frac{z}{2}}{\sin^2 z.(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos z})}$$

$$=2\lim_{z\to 0}\frac{\sin^2\frac{z}{2}}{(\frac{z}{2})^2}.\frac{z^2}{\sin^2 z}.\frac{1}{4}.\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos z}}=2.\frac{1}{4}.\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin x}}{\cos^2 x}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}}$ ។

5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1+\tan\pi x}{1-x^2}$

តាង $x=1-z$ កាលណា $x\to1$ នោះ $z\to0$

$$=\lim_{z\to0}\frac{(1-z)^3-1+\tan(\pi-\pi z)}{1-(1-z)^2}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{1-3z+3z^2-z^3-1-\tan\pi z}{1-1+2z-z^2}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{-3z+3z^2-z^3-\tan\pi z}{2z-z^2}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{z(-3+3z-z^2-\frac{\tan\pi z}{z})}{z(2-z)}=\frac{-3-\pi}{2}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1+\tan\pi x}{1-x^2}=-\frac{3+\pi}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to2}(4-x^2)\tan\frac{\pi x}{4}$

តាង $z=2-x$ នាំឱ្យ $x=2-z$ កាលណា $x\to2$ នោះ $z\to0$

$$=\lim_{z\to0}\left[4-(2-z)^2\right]\tan\frac{\pi}{4}(2-z)$$

$$=\lim_{z\to0}(4z-z^2)\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi z}{4})=\lim_{z\to0}(4-z)\frac{\frac{\pi z}{4}}{\tan\frac{\pi z}{4}}.\frac{4}{\pi}=\frac{16}{\pi}$$

7. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\tan\frac{x}{2}$

តាង $z=\pi-x$ នាំឱ្យ $x=\pi-z$ កាលណា, $x\to\pi$ នោះ $z\to 0$

$$=\lim_{z\to 0} z\tan\frac{\pi-z}{2}=\lim_{z\to 0} z\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{z}{2}\right)$$

$$=\lim_{z\to 0} z\cot z=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\tan z}=1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\tan\frac{x}{2}=1}$ ។

8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{1-\sqrt{2}\sin x}$

តាង $z=\frac{\pi}{4}-x$ នាំឱ្យ $x=\frac{\pi}{4}-z$ កាលណា, $x\to\frac{\pi}{4}$ នោះ $z\to 0$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{1-\tan(\frac{\pi}{4}-z)}{1-\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-z)}=\lim_{z\to 0}\frac{1-\frac{1-\tan z}{1+\tan z}}{1-\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos z-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin z)}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2\tan z}{(1-\cos z+\sin z)(1+\tan z)}$$

$$=2\lim_{z\to 0}\frac{\frac{\tan z}{z}}{(\frac{1-\cos z}{z}+\frac{\sin z}{z})(1+\tan z)}=2.\frac{1}{(0+1)(1+0)}=2$$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\pi - 3x}{\sqrt{3} - 2\sin x}$ តាង $z = \dfrac{\pi}{3} - x$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\pi - 3(\frac{\pi}{3} - z)}{\sqrt{3} - 2\sin(\frac{\pi}{3} - z)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{3z}{\sqrt{3} - 2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos z - \frac{1}{2}\sin z)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{3z}{\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos z - \sin z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{3}{\sqrt{3}\frac{1-\cos z}{z} - \frac{\sin z}{z}} = \frac{3}{0-1} = -3$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\pi - 3x}{\sqrt{3} - 2\sin x} = -3}$ ។

10. $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 - x - 2)\tan\dfrac{\pi}{x}$

តាង $z = \dfrac{1}{x}$ នាំឱ្យ $x = \dfrac{1}{z}$ កាលណា $, x \to 2$ នោះ $z \to \dfrac{1}{2}$

$$= \lim_{z\to\frac{1}{2}} (\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 2)\tan \pi z$$

តាង $u = \dfrac{1}{2} - z$ នាំឱ្យ $z = \dfrac{1}{2} - u$ កាលណា $, z \to \dfrac{1}{2}$ នោះ $u \to 0$

$$= \lim_{u\to 0}[\frac{1}{(\frac{1}{2}-u)^2}-\frac{1}{\frac{1}{2}-u}-2]\tan\pi(\frac{1}{2}-u)$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}+u-2(\frac{1}{2}-u)^2}{(\frac{1}{2}-u)^2}\tan(\frac{\pi}{2}-\pi u) = \lim_{u\to 0}\frac{3u-2u^2}{(\frac{1}{2}-u)^2}\cot(\pi u)$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{3-2u}{(0.5-u)^2}\cdot\frac{\pi u}{\tan\pi u}\cdot\frac{1}{\pi} = \frac{12}{\pi}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 2}(x^2-x-2)\tan\frac{\pi}{x} = \frac{12}{\pi}}$ ។

11. $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{\cos\frac{\pi}{x+1}}$

តាង $z=\frac{1}{x+1}$ នាំឱ្យ $x=\frac{1}{z}-1$

កាលណា, $x\to 1$ នោះ $z\to\frac{1}{2}$

$$= \lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{1-(\frac{1}{z}-1)^3}{\cos\pi z}$$

តាង $u=\frac{1}{2}-z$ នាំឱ្យ $z=\frac{1}{2}-u$

កាលណា, $z\to\frac{1}{2}$ នោះ $u\to 0$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{1-\left(\frac{1}{\frac{1}{2}-u}-1\right)^3}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi u\right)}=\lim_{u\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}-u\right)^3-\left(1-\frac{1}{2}+u\right)^3}{\left(\frac{1}{2}-u\right)^3\sin\pi u}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{8}-\frac{3}{4}u+\frac{3}{2}u^2-u^3-\frac{1}{8}-\frac{3}{4}u-\frac{3}{2}u^2-u^3}{\left(\frac{1}{2}-u\right)^3\sin\pi u}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{-\frac{3}{2}u-2u^3}{\left(\frac{1}{2}-u\right)^3\sin\pi u}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{-\frac{3}{2}-2u^2}{\left(\frac{1}{2}-u\right)^3}\cdot\frac{\pi u}{\sin\pi u}\cdot\frac{1}{\pi}=-\frac{12}{\pi}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{\cos\frac{\pi}{x+1}}=-\frac{12}{\pi}}$ ។

12. $\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)^2}{1-\sin\frac{\pi}{x}}$

តាង $z=\frac{1}{x}$ នាំឱ្យ $x=\frac{1}{z}$

កាលណា, $x\to 2$ នោះ $z\to\frac{1}{2}$

$$= \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{(2-\frac{1}{z})^2}{1-\sin \pi z}$$

តាង $u = \frac{1}{2} - z$ នាំឱ្យ $z = \frac{1}{2} - u$

កាលណា, $z \to \frac{1}{2}$ នោះ $u \to 0$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{(2-\frac{1}{0.5-u})^2}{1-\sin(\frac{\pi}{2}-\pi u)}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{(1-2u-1)^2}{(0.5-u)^2(1-\cos \pi u)}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{4u^2}{(0.5-u)^2 2\sin^2 \frac{\pi u}{2}}$$

$$= 2\lim_{u\to 0} \frac{1}{(0.5-u)^2} \cdot \frac{(\frac{\pi u}{2})^2}{\sin^2 \frac{\pi u}{2}} \cdot \frac{4}{\pi^2} = \frac{8}{\pi^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 2} \frac{(2-x)^2}{1-\sin\frac{\pi}{x}} = \frac{8}{\pi^2}}$ ។

13. $\lim_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{\pi x}{x+\pi}}{\pi-x}$

តាង $t=\frac{\pi x}{x+\pi}\Rightarrow x=\frac{\pi t}{\pi-t}$ បើ $x\to\pi\ \Rightarrow t\to\frac{\pi}{2}$

$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\pi-\frac{\pi t}{\pi-t}}=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-t)\cos t}{\pi(\pi-2t)}$$

តាង $u=\frac{\pi}{2}-t\ \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}-u$ បើ $t\to\frac{\pi}{2}\Rightarrow u\to 0$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(\pi-\frac{\pi}{2}+u)\cos(\frac{\pi}{2}-u)}{\pi(\pi-\pi+2u)}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}+u}{2\pi}.\frac{\sin u}{u}=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{\pi x}{x+\pi}}{\pi-x}=\frac{1}{4}}$ ។

14. $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\cos\frac{\pi x}{x+3}}$

តាង $z=\frac{\pi x}{x+3}$ នាំឱ្យ $x=\frac{3z}{\pi-z}$

កាលណា,$x\to 3$ នោះ $z\to\frac{\pi}{2}$

$$= \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3z}{\pi - z} - 3}{\cos z} = \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{3(2z - \pi)}{(\pi - z)\cos z}$$

តាង $u = \frac{\pi}{2} - z \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} - u$

បើ $z \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow u \to 0$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{3(\pi - 2u - \pi)}{(\pi - \frac{\pi}{2} + u)\cos(\frac{\pi}{2} - u)}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{-6u}{(\frac{\pi}{2} + u)\sin u}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{-6}{\frac{\pi}{2} + u} . \frac{u}{\sin u} = -\frac{12}{\pi}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{\cos \frac{\pi x}{x + 3}} = -\frac{12}{\pi}}$ ។

15. $\lim_{x \to 1} \frac{\tan \frac{\pi}{x}}{1 - x^2}$

តាង $z = \frac{1}{x}$ នាំឱ្យ $x = \frac{1}{z}$

កាលណា $x \to 1$ នោះ $z \to 1$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{\tan \pi z}{1 - \frac{1}{z^2}} = \lim_{z \to 1} \frac{z^2 \tan \pi z}{z^2 - 1}$$

តាង $u = 1 - z$ នាំឱ្យ $z = 1 - u$

កាលណា $z \to 1$ នោះ $u \to 0$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{(1-u)^2 \tan(\pi - \pi u)}{(1-u)^2 - 1}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{(1-u)^2(-\tan \pi u)}{2u - u^2}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{-(1-u)^2}{2-u} . \frac{\tan \pi u}{\pi u} . \pi = -\frac{\pi}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{\tan \frac{\pi}{x}}{1 - x^2} = -\frac{\pi}{2}}$ ។

16. $\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sin \frac{2\pi}{x+3}}{(1-x)^2}$

តាង $z = \frac{1}{x+3}$ នាំឱ្យ $x = \frac{1}{z} - 3$ បើ $x \to 1$ នោះ $z \to \frac{1}{4}$

$$= \lim_{z \to \frac{1}{4}} \frac{1 - \sin 2\pi z}{(1 - \frac{1}{z} + 3)^2} = \lim_{z \to \frac{1}{4}} \frac{z^2(1 - \sin 2\pi z)}{(4z-1)^2}$$

តាង $u=\frac{1}{4}-z$ នាំឱ្យ $z=\frac{1}{4}-u$

កាលណា, $z\to\frac{1}{4}$ នោះ $u\to 0$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(0.25-u)^2[1-\sin(\frac{\pi}{2}-\pi u)]}{(1-4u-1)^2}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(0.25-u)^2(1-\cos\pi u)}{16u^2}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(0.25-u)^2.2\sin^2\frac{\pi u}{2}}{16u^2}$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{u\to 0}(0.25-u)^2.\frac{\sin^2\frac{\pi u}{2}}{(\frac{\pi u}{2})^2}.\frac{\pi^2}{4}=\frac{1}{8}.\frac{1}{16}.\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{512}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{1-\sin\frac{2\pi}{x+3}}{(1-x)^2}=\frac{\pi^2}{512}}$ ។

17. $\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\sin\frac{2\pi}{x}}$

តាង $z=\frac{2}{x}$ នាំឱ្យ $x=\frac{2}{z}$ កាលណា, $x\to 2$ នោះ $z\to 1$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{2-\frac{2}{z}}{\sin \pi z} = 2\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z.\sin \pi z}$$

តាង $u = 1 - z$ នាំឱ្យ $z = 1 - u$

កាលណា, $z \to 1$ នោះ $u \to 0$

$$= 2\lim_{u\to 0}\frac{-u}{(1-u)\sin(\pi-\pi u)}$$

$$= -2\lim_{u\to 0}\frac{1}{1-u}.\frac{\pi u}{\sin \pi u}.\frac{1}{\pi} = -\frac{2}{\pi}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\sin\frac{2\pi}{x}} = -\frac{2}{\pi}}$ ។

18. $\boxed{\lim_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi x}{x+1} = \frac{8}{\pi}}$

19. $\boxed{\lim_{x\to 2}(2x-x^2)\cot\frac{2\pi}{x} = \frac{4}{\pi}}$

លំហាត់ទី៩

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin 2x}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ $,a,b\in IR^*$

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x}+3e^{2x}-5}{e^{3x}-1}$

ឃ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{2x}+...+e^{nx}-n}{x}$

ង. $\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}-1)(e^{2x}-1)...(e^{nx}-1)}{x^{n}}$

ច. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-\cos 2x}{x^2}$

ឆ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2\sin x}-e^{\tan 3x}}{x^3+x}$

ជ. $\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-2x^2}+\sin x-\tan x-x}{x^3}$

ឈ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3\sin^2 x}-\cos x\cos 3x}{-e^{2x^2}+\cos 2x}$

ញ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{e^{x^2}+3}-2\cos 4x}{x\sin x}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin 2x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^x \sin 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}.\frac{2x}{\sin 2x}.\frac{1}{e^x} = 1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x} = 1}$ ។

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ $,a,b \in IR^*$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^{ax}-1)-(e^{bx}-1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}.a - \lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}-1}{bx}.b = a-b$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = a-b}$

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{2e^x+3e^{2x}-5}{e^{3x}-1}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2(e^x-1)+3(e^{2x}-1)}{(e^{3x}-1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2.\frac{e^x-1}{x}+6.\frac{e^{2x}-1}{2x}}{3.\frac{e^{3x}-1}{3x}} = \frac{2+6}{3} = \frac{8}{3}$$

ឃ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{2x}+...+e^{nx}-n}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}-1)+(e^{2x}-1)+........+(e^{nx}-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{x}-1}{x}+2.\frac{e^{2x}-1}{2x}+.....+n.\frac{e^{nx}-1}{nx}\right]$$

$$=1+2+..........+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ង. $\lim_{x\to 0}\dfrac{(e^{x}-1)(e^{2x}-1)...(e^{nx}-1)}{x^{n}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}.2\frac{e^{2x}-1}{2x}......n\frac{e^{nx}-1}{nx}=1.2.3......n=n!$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\dfrac{(e^{x}-1)(e^{2x}-1)...(e^{nx}-1)}{x^{n}}=n!}$ ។

ច. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^{2}}-\cos 2x}{x^{2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^{2}}-(1-2\sin^{2}x)}{x^{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^{2}}-1+2\sin^{2}x}{x^{2}}=-\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^{2}}-1}{-x^{2}}+2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{2}x}{x}=-1+2=1$$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2\sin x}-e^{\tan 3x}}{x^3+x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{-2\sin x}-1)-(e^{\tan 3x}-1)}{x(x^2+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2\sin x}-1}{-2\sin x}.\frac{\sin x}{x}.\frac{-2}{x^2+1}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan 3x}-1}{\tan 3x}.\frac{\tan 3x}{3x}.\frac{3}{x^2+1}=-5$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2\sin x}-e^{\tan 3x}}{x^3+x}=-5}$ ។

ជ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{-2x^2}+\sin x-\tan x-x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{-2x^2}-1)+\cos x\tan x-\tan x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(\cos x-1)}{x^3}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-1}{-2x^2}-2\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}.\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=-\frac{5}{2}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{-2x^2}+\sin x-\tan x-x}{x^3}=-\dfrac{5}{2}$ ។

ឈ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{3\sin^2 x}-\cos x\cos 3x}{-e^{2x^2}+\cos 2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3\sin^2 x}-(1-2\sin^2\frac{x}{2})(1-2\sin^2\frac{3x}{2})}{-e^{2x^2}+1-2\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3\sin^2 x}-1+2\sin^2\frac{3x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}-4\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{3x}{2}}{-(e^{2x^2}-1+2\sin^2 x)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{3.\dfrac{e^{3\sin^2 x}-1}{3\sin^2 x}.\dfrac{\sin^2 x}{x^2}+2\dfrac{\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}+2\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}-4\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}.\sin^2\dfrac{3x}{2}}{2.\dfrac{e^{2x^2}-1}{2x^2}+2.\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}$$

$$=-\frac{3+2.\frac{9}{4}-2.\frac{1}{4}-0}{2+2}=\frac{3+4}{4}=\frac{7}{4}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{3\sin^2 x}-\cos x\cos 3x}{-e^{2x^2}+\cos 2x}=\dfrac{7}{4}$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x+\cos x-\sqrt{2}}{(\frac{\pi}{4}-x)^2} & \text{បើ } x\neq\dfrac{\pi}{4}\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{បើ } x=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំនុច $x_0=\dfrac{\pi}{4}$?

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំនុច $x_0=\dfrac{\pi}{4}$

គេមាន $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x+\cos x-\sqrt{2}}{(\frac{\pi}{4}-x)^2}$

តាង $t=\dfrac{\pi}{4}-x$ នាំឱ្យ $x=\dfrac{\pi}{4}-t$ ។ កាលណា $x\to\dfrac{\pi}{4}$ នោះ $t\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}-t)+\cos(\frac{\pi}{4}-t)-\sqrt{2}}{t^2}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos t-\sin t\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\cos t+\sin\frac{\pi}{4}\sin t-\sqrt{2}}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t-\sqrt{2}}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}\cos t-\sqrt{2}}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}(\cos t-1)}{t^2}=\frac{-2\sqrt{2}\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}.\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{(\frac{t}{2})^2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=f(\frac{\pi}{4})$$

ដោយ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=f(\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x_0=\frac{\pi}{4}$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1-x^3}$ កំនត់គ្រប់ $x \neq 1$ ។

តើគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ f ឱ្យជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$ បានឬទេ ?

បើអាច ចូរកំនត់រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)$

ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់

គេមាន $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{1-x^3}$

តាង $t = 1 - x$ នាំឱ្យ $x = 1 - t$ ។ កាលណា $x \to 1$ នោះ $t \to 0$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin(\pi - \pi t)}{1-(1-t)^3}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi t)}{1-1+3t-3t^2+t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi t)}{t(3-3t+t^2)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \cdot \frac{\pi}{3-3t+t^2} = \frac{\pi}{3}$$

ដោយ $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{\pi}{3}$ កំនត់ នោះគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ $f(x)$

ឱ្យជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$ ។

បើយើងតាង $g(x)$ ជាអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)$

ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$ នោះគេអាចសរសេរ៖

ដូចនេះ $g(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{1 - x^3} & \text{បើ } x \neq 1 \\ \dfrac{\pi}{3} & \text{បើ } x = 1 \end{cases}$

ជំពូកទី៤

លំហាត់អនុវត្តន៍

១-ដោយប្រើនិយមន័យចូរស្រាយបញ្ជាក់លីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim_{x\to 2}(3x+1)=7$

ខ/ $\lim_{x\to -1}(2x+5)=3$

គ/ $\lim_{x\to 3}\frac{2x+3}{x}=3$

ឃ/ $\lim_{x\to 1}(x^2+x+2)=4$

ង/ $\lim_{x\to 2}x^3=8$

ច/ $\lim_{x\to 2}\sqrt{2x+5}=3$

ឆ/ $\lim_{x\to 2}3^x=9$

ជ/ $\lim_{x\to 1}(x^3+x+3)=5$

ឈ/ $\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}=3$

ញ/ $\lim_{x\to 8}\sqrt[3]{x}=2$

២-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2}$

ខ/ $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^2-5x+6}$

គ/ $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{2x^3-3x+1}$

ឃ/ $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-4x+3}{(x-1)^2}$

ង/ $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+2x-4}{x^2-6x+8}$

ច/ $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{4\sin^2 x-1}$

៣-កំណត់តម្លៃនៃចំនួនថេរ **a** ដើម្បីឲ្យលីមីតខាងក្រោមជាលីមីតនៃចំនួន

ថេរ ហើយកំណត់លីមីតនេះផង ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+4}{x-2}$ ខ/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}$

គ/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}+a}{x}$ ឃ/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+a}-1}{x-2}$

ង/ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+ax}-1}{x^2-1}$ ច/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+ax+2}{x^2-4}$

៤-កំណត់តម្លៃនៃចំនួនថេរ **a** និង **b** ដើម្បីឲ្យលីមីតខាងក្រោមជាលីមីតនៃ

ចំនួនថេរ ហើយកំណត់លីមីតនេះផង ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+ax+b}{(x-1)^2}$ ខ/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4+ax^3+bx+4}{x^3-2x^2-4x+8}$

គ/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4+6x^2+ax+b}{x^3-3x^2+4}$ ឃ/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^3+ax+b}{x^2}$

ង/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5+ax+b}{x^3-3x+2}$ ច/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax^2+bx+4}{x^4-8x^2+16}$

ឆ/ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3+ax+b}{(x-a)^2}$ ជ/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+b-(1+2x)^3}{x^2}$

៥-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\sin^2 5x}$

ខ/ $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}$

គ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

ឃ/ $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$

ង/ $\lim_{x\to \infty} x\sin\frac{1}{x}$

ច/ $\lim_{x\to +\infty} x^2(1-\cos\frac{1}{x})$

៦-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$

ខ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

គ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$

ឃ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

ង/ $\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

ច/ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

ឆ/ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x.\cos 2x}{x^2}$

ជ/ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

ឈ/ $\lim_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi x}{2}$

ញ/ $\lim_{x\to 1}\frac{\tan \pi x}{1-x}$

៧-កំណត់អនុគមន៍ដឺក្រេទីពីរ $y=f(x)$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌទាំងពីរ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}=1 \quad (i) \quad \text{និង} \quad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1} \quad (ii)$$

៨-គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2-2\cos ax}{x^2}$ ដែល $a\in IR$

កំណត់តម្លៃនៃ a ដើម្បីឲ្យ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=100$ ។

៩-គេឲ្យអនុគមន៍ f ផ្ទៀងផ្ទាត់ $4-x^2\le f(x)\le 4+x^2$ គ្រប់ $x\in IR$ ។

គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ។

១០-គេមាន $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+(a-1)x+3-3a}{x^2-4x+3}$

គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$

១១-គេមាន $f(x)=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{x^{p+1}-x^p-x+1}$ ដែល $n\in IN$ និង $p\in IN$

គណនា $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ ។

១២-មានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{\tan x-\sin x}{x^n}$ ដែល $n\in IN$

កំណត់គ្រប់ n ដែលធ្វើឲ្យ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ជាចំនួនពិត ។

១៣-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x}$ ខ/ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{x-1}$

គ/ $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3\right)\right]$ ឃ/ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-\sin\frac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$

១៤-គេមាន $S_n = \frac{1}{1\times 4} + \frac{1}{4\times 7} + \frac{1}{7\times 11} + \dots\dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

ក/កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យចំពោះគ្រប់ $k \in IN$

គេបាន $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{A}{3k-2} + \frac{B}{3k+1}$ ។

ខ/ប្រើសមភាពខាងលើចូរគណនា S_n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ។

១៥-ក/ គេមាន $k \in IN$ ។

ចូរស្រាយថា $0 < \frac{2k-1}{2k} < \sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}$

ខ/តាង $u_n = \frac{1\times 3\times 5\times \dots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times \dots\times 2n}$ ។

បង្ហាញថា $0 < u_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ រួចទាញថា $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ ។

១៦-គេមានពហុកោណនិយ័តចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមាន $\mathbf{n}$ ជ្រុង និងកាំ

ស្មើនឹង $\mathbf{a}$ ។ តាង $\mathbf{S_n}$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃពហុកោណនេះ ។

គណនា $\mathbf{S_n}$ រួចកំណត់រកតម្លៃ $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathbf{S_n}$ ។

១៧-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}$ ខ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - x}{2e^x+1}$

គ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x})$ ឃ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\dfrac{2x+3}{x+1})$

ង/ $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[4]{x^4+4x^3} + \sqrt[3]{x^3+3x^2} + \sqrt{x^2+2x} - 3x)$

១៨-គណនាលីមីត ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2+x+2} - 2\sqrt{x^2-x+3})$

ខ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x+2} - \sqrt{x^2-x+3})$

១៩-កំណត់តម្លៃ $\mathbf{a}$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+ax-\sqrt{1+x}}{x} = \dfrac{1}{8}$

២០-គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ ដែល $m,n \in IN$ ។

២១-គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1.2+2.3+3.4+....+(n-1)n}{n^3}$ ។

២២-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})....(1-\dfrac{1}{n^2})$

ខ/ $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+2}}+....+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}})$

២៣-ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ គេមាន ៖

$$S_n=\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{3\times5}+...+\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}=\sum_{p=0}^{n}\frac{2}{(2p+1)(2p+3)}$$

ក/គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយប្រើ $\dfrac{2}{(2p+1)(2p+3)}$

ជាទម្រង់ $\dfrac{a}{2p+1}+\dfrac{b}{2p+3}$ ។

ខ/ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

២៤-ដោយប្រើសមភាព $\dfrac{k}{(k+1)!}=\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}$ ចូរគណនាផលបូក

$S_n=\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+...+\dfrac{n}{(n+1)!}$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

២៥-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2\ln x}{1-2x+\ln x}$

ខ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x}+x-1}{e^{x}+1}$

គ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}[x-\ln(2e^{x}+1)]$

ឃ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-2\ln x}{1+3\ln x}$

ង/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\ln x}{x+\ln x}$

ច/ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^{x}+x-1}{e^{x}+x}$

២៦-គណនាលីមីត ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$

ខ/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}+x-1}{x}$

គ/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x^{2}}-\cos 2x}{x^{2}}$

ឃ/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{\tan x}}{x}$

ង/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

ច/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{x^{2}}$

ឆ/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}+e^{2x}-2}{\sin x}$

ជ/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{x}-1)(e^{3x}-1)}{x^{2}}$

ឈ/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\sin 2x}-\cos 2x}{\tan^{2}x}$

ញ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}x(e^{\frac{2}{x}}-1)$

២៧-គណនាលីមីត ៖

ក/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x}$

ខ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{x}$

គ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2-\cos x)}{x^2}$

ឃ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x\sin 3x)}{x^2}$

ង/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

ច/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2\cos x-\cos 2x)}{\sin^2 x}$

ឆ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln[(1+x)(1+2x)]}{x}$

ជ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan x)}{x}$

ឈ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2-e^x)}{x}$

ញ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3-2\cos x\sqrt{\cos 2x})}{x^2}$

២៨-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$

ខ/ $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x^2-2x+2)}{x^3-3x+2}$

គ/ $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{\pi-4x}$

ឃ/ $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$

ង/ $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-4x+5)}{e^{x-2}+e^{2-x}-2}$

ច/ $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(4-x)-\ln 2}{x-2}$

ឆ/ $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$

ជ/ $\lim_{x\to e}\frac{\ln^2 x-3\ln x+2}{1-\ln x}$

២៩-គេឲ្យអនុគមន៍ f ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x-\frac{x^2}{2}\le f(x)\le x$ ចំពោះគ្រប់ x ។

គេតាង $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$ ។ គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

៣០-គណនាលីមីត ៖

$$A=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+4x+1}+...+\sqrt{x^2+2nx+1}-\sqrt{n^2x^2+1})$$

៣១-គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$u_0=1\ ,\ u_1=2$ និង $u_{n+2}=\frac{u_{n+1}+u_n}{2}$ ដែល $n=0,1,2,...$

ក/ចូរស្រាយថា $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+\frac{5}{2}$ ។

ខ/ គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ។

៣២-គេមានស្វ៊ីត $u_n=\sqrt{n+\sqrt{(n-1)+....+\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}$

គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(u_n-\sqrt{n})$ ។

៣៣-គេឲ្យ $a_k=\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ តាង $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ ។រក $\lim_{n\to+\infty} S_n$?

៣៤-គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x-3}-\sqrt[3]{x-1}}{x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2x-1}}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x+1-\sqrt[4]{4x+1}}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x-\sqrt[3]{3x-2}}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt[3]{x^2+4}-x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^4+1}}$

8. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x-4}-\frac{x}{2}}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}-2}$

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-\sqrt{x^2+60}}{\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[4]{x-1}}$

៣៥-ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x^2+4}}{x-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{4x^2+4}}{x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{4x^2+4}-\sqrt{2x+2}}{x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt[6]{x^2+60}}{x^2-\sqrt[3]{x^2+60}}$

៣៦-ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1-\tan^3 x}$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{3-4\sin^2 x}{2\cos x - 1}$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \sin 2x}{4\cos^2 x - 3}$

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^4 x + \cot^4 x - 2}{1-2\sin 2x}$

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{1-8\sin^3 x}{4\cos^2 x - 3}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin^2 x + \sin^3 x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x - x^2 - \sin^2 x}{\cos x - x + 1}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{x^2+1}}{x^2 + \sin^2 x}$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1-\sqrt[3]{\tan x}}$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4 - \sin^4 x}{\sqrt{x^2+1} - \cos x}$

៣៧-ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{2^x+4} - 2}{4^x - 16}$

2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2^x - \sqrt{2x+2}}{4^{2x-1} - x^2 - 2x - 1}$

6. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \dots + \sqrt[n]{x} - n}{x-1}$

7 . $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x} + \sqrt[n]{x} - 2}{x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2^x-\sqrt{1+3^x}}{\sqrt{4^x-1}-3^{\frac{x}{2}}}$

8 . $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1+\sqrt[m]{x})(1+\sqrt[n]{x})-4}{x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-x-1}{e^{2x}-2xe^x+x^2-1}$

9 . $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1+x^m)^n(1+x^n)^m-2^{m+n}}{x-1}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^{3x}-1}$

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{1+x^n}-\sqrt[m]{1-x^n}}{x^n}$

៣៨-ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x.\sin 4x.\sin 8x}{x^3}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2(\sin 2x^3)}{x^6}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin[\sin(\sin x)]}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x+1-\cos 4x}{x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan^3 2x.\sin^2 3x}{\sin x^5}$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x\sin^3 2x}{x^5}$

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x.\sin 2x.\sin 3x\ldots\sin nx}{x^n}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3(\sin^2 4x)}{x^6}$

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\tan 2x)+\tan(\sin 4x)}{x}$

៣៩- គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 2x}{\sin^2 4x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 3x}{x^2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x+\cos 2x-3}{x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-3\cos 2x+2\cos 3x}{x^2}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x\ldots\cos nx}{x^2}$

៤០- គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\cos x}-\sqrt{3}}{x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3-\cos 2x}}{x^2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\sqrt{\cos 2x}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^n x}{x\sin x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3\cos x}-2}{1-\cos^3 2x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}{x^2}$

៤១- គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{1-x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\cos 2x}{(\pi-x)^2}$

3. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{(\sin\frac{x}{4}-\cos\frac{x}{4})^2}$

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8+\tan \pi x}{2-x}$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x^3}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(1-x^2\right).\tan\dfrac{\pi x}{2}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sin\frac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$

9. $\lim\limits_{x\to 2}(4-x^2)\tan\dfrac{\pi}{x}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\cos\frac{\pi}{x+1}}$

៤២-គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos \pi x}{(1-x)^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sin\frac{\pi}{x}}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3+\tan \pi x}{1-x}$

4. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\pi^2-x^2}$

៤៣-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+\sin^3 x}{x^3}$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 3x}{x^2}$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{1-\cos\sqrt{x}}$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{1-\cos(1-\cos\sqrt{x})}$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{2\sin x-\sin 2x}$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{\tan x}$

8. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{x\sin x}$

9. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x\tan x}$

10. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x}-3\cos x+1\right)\right]$

៤៤-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+\cos x}-\sqrt{(1+x)\cos x}}{\sin 3x-3\sin x}$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x+\cos\sqrt{x}}}{x}$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}-2}{x^2}$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x+\tan x}{x-\sin x-\tan x}$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{1-\cos 2x}$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{1+\cos 5x}}{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 5x}}$

8. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos 2x\sqrt{\cos x}}$

៤៥-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi x}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\tan \pi x}{1-x}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sin\frac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x-2)\tan\frac{\pi}{x}$

5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi^2-4x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{\sin(x-a)}$

7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin^3 2x}{\tan x-\cos tx}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{4}-\arctan x}{1-x}$

9. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\arcsin x-\arccos x}{1-x\sqrt{2}}$

10. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1+\cos x}{(\pi-x)^2}$

៤៦-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^3)\tan\frac{\pi}{1+x}$

2. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}}{\pi-x}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cot\frac{\pi}{x}}{4-x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\cos\frac{\pi}{x+1}}$

3. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x^2}$

8. $\lim_{x\to 1}(1-x)\text{tna}\dfrac{\pi x}{3x-1}$

4. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-8+\sin\pi x}{2-x}$

9. $\lim_{x\to 2}\dfrac{1-\sin\frac{\pi}{x}}{x^2-4x+4}$

5. $\lim_{x\to 1}\dfrac{(1-x)^2}{1-\sin\frac{\pi}{x+1}}$

10. $\lim_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{x+1}$

៤៧-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $\lim_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

6. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$

2. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x}{1+x^2}\tan\left(\dfrac{\pi x+4}{2x+3}\right)$

7. $\lim_{x\to\infty}(3x+1)\sin\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right)$

3. $\lim_{x\to\infty}(2x-3)\cos\left(\dfrac{\pi x+2}{2x+1}\right)$

8. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}\cot\left(\dfrac{\pi x+1}{2x-3}\right)$

4. $\lim_{x\to\infty}(3x+1)\tan\left(\dfrac{\pi x}{x+1}\right)$

9. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{2x^2+1}\cos\left(\dfrac{\pi x+1}{2x+3}\right)$

5. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+4}\tan\left(\dfrac{3\pi x+4}{6x-5}\right)$

10. $\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1}\right)$