សិក្សាគណិតវិទ្យាដោយខ្លួនឯង

រូបមន្តគណិតវិទ្យា

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១២

ចំនួនកុំផ្លិច លីមីត ដេរីវេ អាំងតេក្រាល សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល
ប្រូបាប៊ីលីតេ ផលគុណស្កាលែ ផលគុណវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ
ប៉ារ៉ាបូល អេលីប អ៊ីពែបូល

រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន
សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យាសាលាមហាសាស្ត្រា

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សារបស់ក្រសួងអប់រំយុវជននិងកីឡា

មេរៀនទី០១

ចំនួនកុំផ្លិច

1-ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត

ក)និយមន័យ

ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិតគឺជាចំនួនកុំផ្លិចដែលក្រោយពីបង្រួមរួច មានរាង $z = a + i.b$ ដែល $a, b \in \Re$ ។

ខ)ចំនួនកុំផ្លិចស្មើគ្នា

$$A + i.B = a + i.b \Leftrightarrow \begin{cases} A = a \\ B = b \end{cases}$$ ដែល $a, b, A, B \in \Re$ ។

គ)ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់

បើ $z = a + i.b$ នោះ $\overline{z} = a - i.b$ ដែល $a, b \in \Re$ ។

ឃ)ប្រមាណវិធីលើកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត

- វិធីបូក ៖

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

- វិធីដក ៖

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$$

- វិធីគុណ ៖

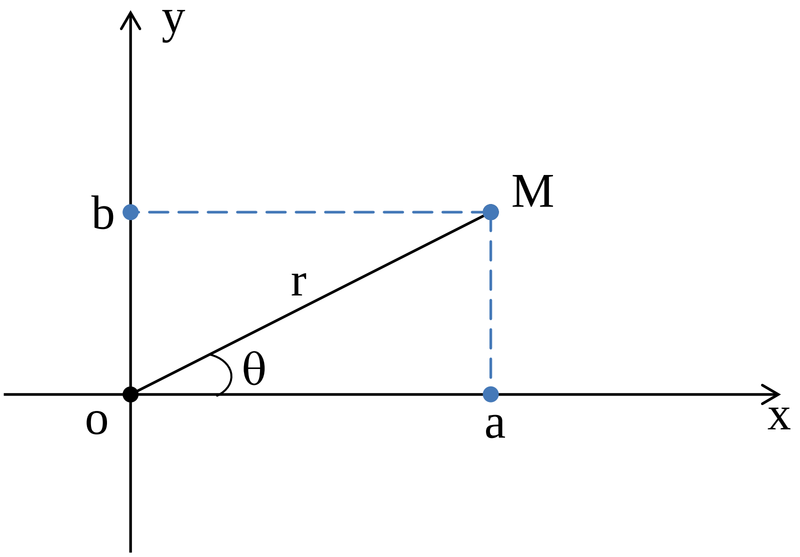
$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad - bc)$$

- វិធីចែក ៖

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i.\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

2-ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ក)ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់



ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = a + i.b$; $a,b \in \Re$ ។

យក $M(a,b)$ ជារូបភាពនៃ z ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) ។ តាង $r = OM$

និង θ ជាមុំផ្គុំដោយ $\overrightarrow{OM}$ និងអក្ស័ (ox) ។

$r = |z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ ហៅថាម៉ូឌុលនិង $\theta = \arg(z)$ ហៅថាអាគុយ

ម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a + i.b$ ដែល $\cos\theta = \frac{a}{r}$ និង $\sin\theta = \frac{b}{r}$ ។

ខ)ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ចំនួនកុំផ្លិច $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ដែល $r > 0$ និង $\theta \in \Re$ ហៅថាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ)ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិចក្នុងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ឧបមាថាគេមានពីរចំនួនកុំផ្លិច ៖

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ និង $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

✍ វិធីគុណ ៖

$$z \times w = r.\rho[\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)]$$

✍ វិធីចែក

$$\frac{z}{w}=\frac{r}{\rho}[\cos(\theta-\varphi)+i\sin(\theta-\varphi)]$$

ឃ)រូបមន្តដឺម័រ

គ្រប់ចំនួនពិត φ និងចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ n គេបាន ៖

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos(n\varphi)+i.\sin(n\varphi)$$

ង)ស្វ័យគុណទី n

គ្រប់ចំនួនពិត φ និង $r>0$ និង ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ n គេបាន ៖

$$\left[r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\right]^n=r^n\left[\cos(n\varphi)+i.\sin(n\varphi)\right]$$

ច)ឬសទី n

ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិច $\mathrm{z}=\mathrm{r}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ ដែល $\mathrm{r}>0$, $\theta\in\Re$

ឬសទី n នៃ z កំណត់ដោយ ៖

$$w=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

ដែល $\mathrm{k}=0,1,2,\ldots,(\mathrm{n}-1)$ ។

3-ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ក)រូបមន្តអឺលែ

គ្រប់ចំនួនពិត x គេមាន $\cos x+i\sin x=e^{ix}$ ដែល $e=2.71828$

ហើយ $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ និង $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ ។

ខ)ទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ចំនួនកុំផ្លិច $z=re^{i\theta}$ ដែល $r>0$,$\theta\in\Re$ ហៅថាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់

ស្បែល ។ r ហៅថាម៉ូឌុល និង θ ហៅថាអាគុយម៉ង់ ។

គ) ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិចក្នុងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ឧបមាថាគេមានពីរចំនួនកុំផ្លិច $z = r\,e^{i\theta}$ និង $w = \rho\,e^{i\varphi}$

- វិធីគុណ $z \times w = r.\rho\,e^{i(\theta+\varphi)}$
- វិធីចែក $\dfrac{z}{w} = \dfrac{r}{\rho}.e^{i(\theta-\varphi)}$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

មេរៀនទី០២

លីមីតនៃអនុគមន៍

១)សញ្ញាណលីមីត

បើ x ខិតជិត a ហើយអនុគមន៍ខិតជិតតម្លៃ L ណាមួយ

នោះគេកំនត់សរសេរ $\lim_{x\to a} f(x)=L$ មានន័យថាអនុគមន៍ $f(x)$

មានលីមីតស្មើ L កាលណា x ខិតជិត a ។

២-លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនកំណត់

✧ និយមន័យ

អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត a បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon>0$

មានចំនួន $\delta>0$ ដែល $0<|x-a|<\delta$ នាំឲ្យ

$|f(x)-L|<\varepsilon$ ។ គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ។

✧និយមន័យ

អនុគមន៍ f ខិតទៅរក $+\infty$ ឬ $-\infty$ កាលណា x ខិតជិត a បើគ្រប់ចំនួន

$M>0$ មានចំនួន $\delta>0$ ដែល $0<|x-a|<\delta$ នាំឲ្យ $f(x)>M$ ឬ

$f(x)<-M$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ ឬ $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ ។

៣-លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់អនន្ត

✧និយមន័យ

អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតទៅ $+\infty$ ឬ $-\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $N > 0$ ដែល $x > N$ ឬ $x < -N$ នាំឲ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ ឬ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ ។

✧ និយមន័យ

អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតទៅ $+\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $M > 0$ មានចំនួន $N > 0$ ដែល $x > N$ នាំឲ្យ $f(x) > M$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ។

✧ និយមន័យ

អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតទៅ $-\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $M > 0$ មានចំនួន $N > 0$ ដែល $x < -N$ នាំឲ្យ $f(x) > M$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ។

៤)ប្រមាណវិធីលើលីមីត

ឧបមាថាអនុគមន៍ $y = f(x)$ និង $y = g(x)$ មានលីមីតកាលណា $x \to a$ នោះគេមានប្រមាណវិធីលីមីតដូចខាងក្រោម

ក) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} k = k$ ដែល $f(x) = k$ អនុគមន៍ថេរ

ខ) $\lim\limits_{x \to a} [k\, f(x)] = k \lim\limits_{x \to a} f(x)$

គ) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$

ឃ) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$

ង) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x)$

ច) $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ ដែល $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

៥)លីមីតខាងឆ្វេងនិងខាងស្តាំ

-បើអនុគមន៍ $f(x)$ ខិតជិត L កាលណា x ខិតជិត x_0 ពីខាងឆ្វេង

នោះ L ជាលីមីតខាងឆ្វេងនៃ $f(x)$ ហើយគេកំនត់សរសេរ

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = R$ ។

-បើអនុគមន៍ $f(x)$ ខិតជិត R កាលណា x ខិតជិត x_0 ពីខាងស្តាំ

នោះ R ជាលីមីតខាងស្តាំនៃ $f(x)$ ហើយគេកំនត់សរសេរ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = R$

-អនុគមន៍ $y = f(x)$ មានលីមីតត្រង់ x_0 លុះត្រាតែលីមីតខាងឆ្វេង ស្មើនឹងលីមីតខាងស្តាំ ។

៦-លីមីតនៃអនុគមន៍អសនិទាន

រូបមន្ត ៖

ក) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ ដែល $a \geq 0$ និង $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

ខ) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ ដែល $a < 0$ និង $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

(ចំនួនគត់សេស) ។

គ) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ ដែល $a \geq 0$ និង $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

៧-លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

បើ f និង g ជាអនុគមន៍ពីរដែលមានលីមីត $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$

និង $\lim\limits_{x\to L} f(x)=f(L)$ នោះ $\lim\limits_{x\to a} f[g(x)]=f(L)$ ។

៨-លីមីតតាមការប្រៀបធៀប

ក)បើ f និង g ជាអនុគមន៍ពីរ ហើយ Aជាចំនួនពិតមួយ

ដែលចំពោះ $\forall x\geq A$: $f(x)\geq g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។

ខ)បើ f និង g ជាអនុគមន៍ពីរ ហើយ A ជាចំនួនពិតមួយ

ដែលចំពោះ $\forall x\geq A$: $f(x)\leq g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ។

គ)បើ f,g និង h ជាអនុគមន៍បី ហើយ A ជាចំនួនពិតមួយ

ដែល$\forall x\geq A$: $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lambda$

នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lambda$ ។ (λ ជាចំនួនពិត) ។

ឃ)បើ f និង g ជាអនុគមន៍ពីរ ហើយ A ជាចំនួនពិតមួយ

ដែល$\forall x\geq A$: $f(x)\leq g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lambda$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lambda'$

នោះ $\lambda\leq\lambda'$ ។ (λ និង λ' ជាចំនួនពិត) ។

៩-លីមីតអនន្តនៃអនុគមន៍

ក) $$\lim_{x\to\pm\infty} ax^2=\begin{cases}+\infty & \text{បើ } a>0\\ -\infty & \text{បើ } a<0\end{cases}$$

ខ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a}{x}=0\quad,\quad a\in\Re$

១០-លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ក) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

ខ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$

គ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$

១១-លីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ក) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

ខ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a\quad,(a>0\ )$

គ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ 1+x\ \right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

ឃ) $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=\begin{cases}+\infty & \text{បើ }\ a>1\\ 0 & \text{បើ }\ 0<a<1\end{cases}$

ង) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

ច) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

ឆ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$

ជ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

ឈ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

ញ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = +\infty$ (ដែល n ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន) ។

១២-លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីត

ក) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

ខ) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

គ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

ឃ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

ង) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

ច) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$

ឆ) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$ (ដែល n ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន) ។

មេរៀនទី០៣

ដេរីវេនៃអនុគមន៍

១-អត្រាបម្រែបម្រួល

គេឲ្យអនុគមន៍ $y = f(x)$ មានក្រាបតំណាង (C) ។

បើអថេរ x ប្រែប្រួលពី x_1 ទៅ x_2 នោះអនុគមន៍ $y = f(x)$ ប្រែប្រួលពី $f(x_1)$ ទៅ $f(x_2)$ នោះគេបានផលធៀប $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ កំណត់ដោយ

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ហៅថាអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ពី x_1 ទៅ x_2 ។

២-ដេរីវេត្រង់ចំណុចមួយ

ក)និយមន័យ

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ត្រង់ចំណុច $x = x_0$ (បើមាន)

កំណត់ដោយ $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

ឬ $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ដែល $x = x_0 + h$ ។

ខ)ភាពមានដេរីវេ

អនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x = x_0$ លុះត្រាតែ ៖

-អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = x_0$

-ដេរីវេខាងឆ្វេង និង ដេរីវេខាងស្តាំស្មើគ្នាគឺ $f'_{-}(x_0) = f'_{+}(x_0)$

ដែល $f'_{-}(x_0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ (ដេរីវេខាងឆ្វេង) និង

$f'_{+}(x_0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ (ដេរីវេខាងស្តាំ) ។

៣-ដេរីវេលើចន្លោះមួយ

អនុគមន៍ f មានដេរីវេលើចន្លោះ I លុះត្រាតែវាមានដេរីវេត្រង់គ្រប់ចំណុច $x \in I$ ។គេកំណត់សរសេរ $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ។

❖ សម្គាល់

បើគេតាង $\Delta x = h$ ដែល $\Delta x \to 0$ នោះ $h \to 0$

គេបាន $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ។

៤-ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

បើ $y = f(u)$ និង $u = g(x)$ នោះគេបាន $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$

ឬ $\dfrac{d}{dx} f\left[u(x)\right] = f'(u) \times u'(x)$ ។

៥-ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ក)ដេរីវេនៃអនុគមន៍ស៊ីនុស និង កូស៊ីនុស

បើ $y = \sin x$ នោះ $y' = \cos x$

បើ $y = \cos x$ នោះ $y' = -\sin x$

បើ $y=\sin u$ នោះ $y'=u'\cos u$

បើ $y=\cos u$ នោះ $y'=-u'\sin u$

ដែល $u=u(x)$ ។

ខ)ដេរីវេនៃអនុគមន៍តង់សង់ និង កូតង់សង់

បើ $y=\tan x$ នោះ $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

បើ $y=\cot x$ នោះ $y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$

បើ $y=\tan u$ នោះ $y'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}=u'(1+\tan^2 u)$

បើ $y=\cot u$ នោះ $y'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}=-u'(1+\cot^2 u)$

៦-ដេរីវេនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

បើ $y=e^x$ នោះ $y'=e^x$

បើ $y=a^x$ នោះ $y'=a^x\ln a$, $a>0\,,a\neq 1$

បើ $y=e^u$ នោះ $y'=u'e^u$

បើ $y=a^u$ នោះ $y'=u'.a^u\ \ln a$

៧-ដេរីវេនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

បើ $y=\ln x$ នោះ $y'=\dfrac{1}{x}$

បើ $y=\ln(ax+b)$ នោះ $y'=\dfrac{a}{ax+b}$

បើ $y=\ln u$ នោះ $y'=\dfrac{u'}{u}$

៨-រូបមន្តដេរីវេ

អនុគមន៍	ដេរីវេ
1) $y = a$ (a ចំនួនថេរ)	$y' = 0$
2) $y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
3) $y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$
4) $y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5) $y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
6) $y = \frac{a}{x^n}$	$y' = -\frac{na}{x^{n+1}}$
7) $y = \sqrt{ax+b}$	$y' = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$
8) $y = (ax+b)^n$	$y' = na(ax+b)^{n-1}$
9) $y = \frac{1}{ax+b}$	$y' = -\frac{a}{(ax+b)^2}$
10) $y = u + v - w$	$y' = u' + v' - w'$
11) $y = u^n$	$y' = nu'u^{n-1}$
12) $y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
13) $y = uv$	$y' = u'v + uv'$
14) $y = uvw$	$y' = u'vw + uv'w + uvw'$

15) $y = \frac{u}{v}$ $\quad$ $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

16) $y = \frac{1}{v}$ $y' = -\frac{v'}{v^2}$

17) $y = e^x$ $\quad$ $y' = e^x$

18) $y = e^{ax}$ $\quad$ $y' = ae^{ax}$

19) $y = \ln x$ $\quad$ $y' = \frac{1}{x}$

20) $y = \ln(ax + b)$ $\quad$ $y' = \frac{a}{ax + b}$

21) $y = \sin x$ $\quad$ $y' = \cos x$

22) $y = \sin(ax)$ $\quad$ $y' = a cos(ax)$

23) $y = \cos x$ $\quad$ $y' = -\sin x$

24) $y = \cos(ax)$ $\quad$ $y' = -a\sin(ax)$

25) $y = \tan x$ $\quad$ $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

26) $y = \tan(ax)$ $\quad$ $y' = \frac{a}{\cos^2(ax)}$

27) $y = \cot x$ $\quad$ $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

28) $y = \cot(ax)$ $\quad$ $y' = -\frac{a}{\sin^2(ax)}$

29) $y = \arcsin x$ $\quad$ $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

30) $y = \arccos x$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

31) $y = \arctan x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

32) $y = arc\cot x$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

33) $y = e^u$ $\qquad y' = u'e^u$

34) $y = \ln u$ $\qquad y' = \dfrac{u'}{u}$

35) $y = \sin u$ $\qquad y' = u'\cos u$

36) $y = \cos u$ $\qquad y' = -u'\sin u$

37) $y = \tan u$ $\qquad y' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

38) $y = \cot u$ $\qquad y' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

39) $y = \arcsin u$ $\qquad y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

40) $y = \arccos u$ $\qquad y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

41) $y = \arctan u$ $\qquad y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

42) $y = arc\cot u$ $\qquad y' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

៩-ដេរីវេបន្តបន្ទាប់

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ អាចមានដេរីវេខ្លួនឯងបន្តទៀត។

គេហៅដេរីវេបន្តបន្ទាប់ដូចតទៅ ៖

ដេរីវេទី1 $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = f^{(1)}(x)$

ដេរីវេទី2 $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = f^{(2)}(x)$

ដេរីវេទី3 $y''' = \frac{d^3y}{dx^2} = f'''(x) = f^{(3)}(x)$

ដេរីវេទី4 $y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = f^{(4)}(x)$

ដេរីវេទីn $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$ ។

មេរៀនទី០៤

អនុវត្តន៍ដេរីវេ

១-សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាបតាងអនុគមន៍មួយ

✧ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$

ត្រង់ចំណុច x_0 គឺជាដេរីវេនៃ f ត្រង់ x_0 គឺ $m=f'(x_0)$ ។

✧ សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$

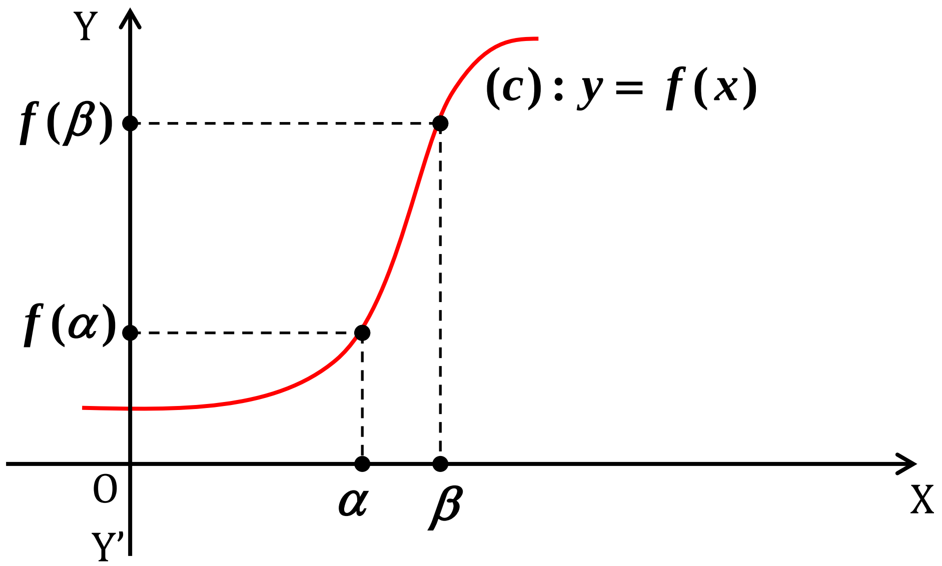
ត្រង់ចំណុច x_0 គឺ $(T): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ ។

២-ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍

ក)អនុគមន៍កើន

✧ f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ I លុះត្រាតែ $f'(x)>0$ គ្រប់ $x\in I$

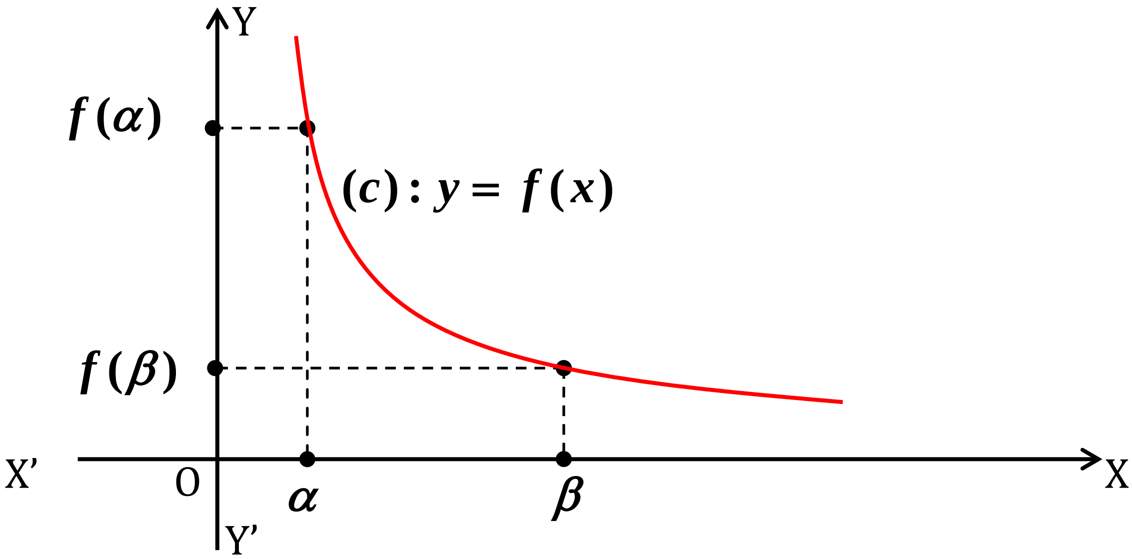
✧ លក្ខណះ បើ $\alpha,\beta\in I$ ដែល $\alpha>\beta$ នាំឲ្យ $f(\alpha)<f(\beta)$ ។



ខ)អនុគមន៍ចុះ

✧ f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ I លុះត្រាតែ $f'(x)<0$ គ្រប់ $x\in I$

✧ លក្ខណៈ បើ $\alpha,\beta\in I$ ដែល $\alpha>\beta$ នាំឲ្យ $f(\alpha)>f(\beta)$ ។



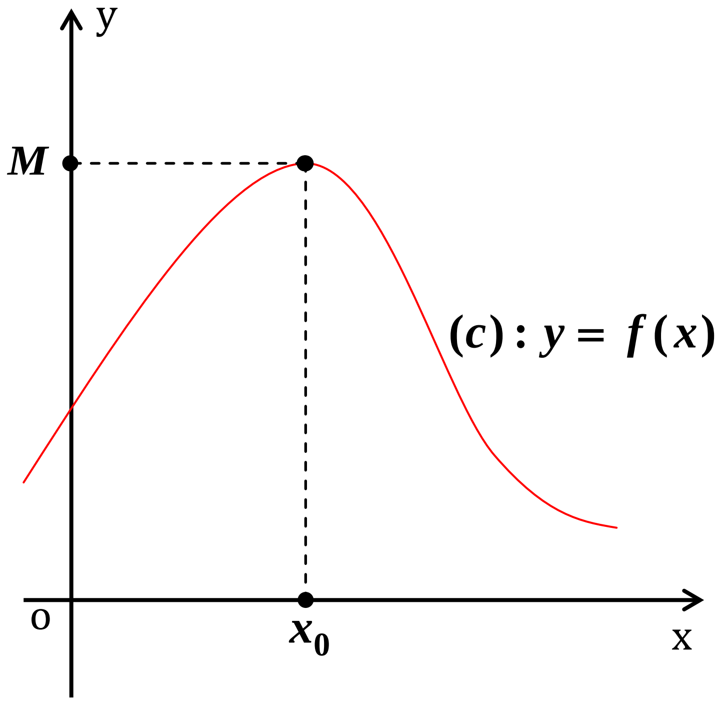
៣-បរមាធៀបនៃអនុគមន៍

✧ អនុគមន៍ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=x_0$ កាលណា

$$\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases}$$

✧ $f\left(x_0\right)=M$

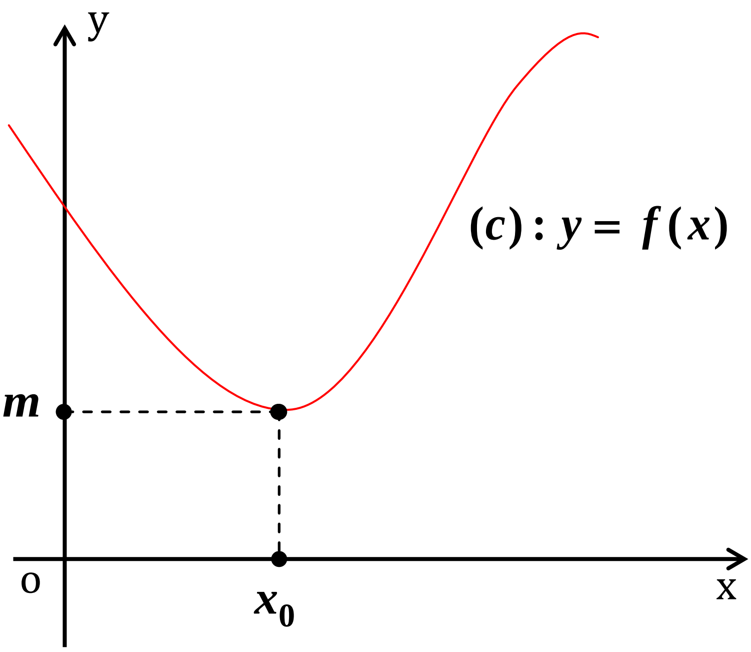
ជាតម្លៃអតិបរមាធៀប ។



✧ អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=x_0$ កាលណា

$$\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases}$$

✧ $f\left(x_0\right)=m$ ជាតម្លៃអប្បបរមាធៀប



៨-ភាពផត ប៉ោង និង ចំណុចរបត់

ក)អនុគមន៍ផត-ប៉ោង

✧ បើគ្រប់ $x\in I$ គេមាន $f''(x)<0$ នោះគេថា f ជាអនុគមន៍ ប៉ោង(Convex function)លើចន្លោះ I ។

✧ បើគ្រប់ $x\in I$ គេមាន $f''(x)<0$ នោះគេថា f ជាអនុគមន៍ ប៉ោង(Concave function)លើចន្លោះ I ។

ខ)ចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង

✧ គេថាចំណុច $I\left(x_0, y_0\right)$ ជាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍

$y=f(x)$ កាលណាខ្សែកោងប៉ោង(ឬផត) នៅលើ $[a,x_0]$

ហើយផត(ឬប៉ោង)នៅលើ $[x_0,b]$ ។

✧ របៀបរកចំណុចរបត់របស់ខ្សែកោងតាង $y=f(x)$ គេត្រូវ ៖

☞ គណនាដេរីវេទីពីរ $y''=f''(x)$

☞ ដោះស្រាយសមីការ $f'(x)=0$

☞ សិក្សាសញ្ញានៃ $f''(x)$

-បើ $f''(x)$ ប្តូរសញ្ញានៅសងខាងនៃឫស x_0 នោះខ្សែកោង
មានចំណុចរបត់ $I\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ ។

-បើ $f''(x)$ មិនប្តូរសញ្ញានោះខ្សែកោងគ្មានចំណុចរបត់ទេ ។

៤-ចំណោទបរមា

✧ វិធីរកបរមាកម្មនៃអនុគមន៍មួយអថេរ

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ $y=f\left(x\right)$

☞រកដេរីវេទីមួយ $y'=f'(x)$

☞ដោះស្រាយសមីការ $y'=f'(x)=0$ មានឫស $x=x_0$

☞រកដេរីវេទីពីរ $y''=f''(x)$

☞សន្និដ្ឋាន

-បើ $f''(x_0)<0$ នោះអនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់

ចំណុច $x=x_0$ គឺ $f(x_0)=M$ ។

-បើ $f''(x_0)>0$ នោះអនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់

ចំណុច $x=x_0$ គឺ $f(x_0)=m$ ។

-បើ $f''(x_0)=0$ មិនអាចសន្និដ្ឋានបាន ។

✧ វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយចំណោទបរមា

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ $y=f(x)$

☞ចំពោះលំហាត់ទាក់ទងនិងរូបធរណីមាត្រ គេត្រូវសង់រូបនោះ

☞ត្រូវជ្រើសរើសអថេរតាង(អញ្ញាត) ទៅតាមប្រធានចំណោទ

ដែលគេចោទសួរ ។

☞ត្រូវដាក់លក្ខខណ្ឌអញ្ញាតដើម្បីឲ្យចំណោទមានន័យ

☞ចងក្រងសមីការដែលទាក់ទងតាមបម្រាប់នៃប្រធាន និង តាមទ្រឹស្តីបទ-

រូបមន្ត ដែលចាំបាច់ពាក់ពន្ធ័ក្នុងចំណោទ ។

☞បង្កើតអនុគមន៍មួយដែលមានអថេរតែមួយតាមវិធីជំនួស

បំបាត់សមីការដែលអាចរកតម្លៃបរមាកម្មបានតាមទ្រឹស្តីដេរីវេ

✧✧ សម្គាល់ ៖

ក្នុងករណីដែលមិនអាចបំបាត់បានគេអាចប្រើទ្រឹស្តីបទសំខាន់ៗ

ក្នុងវិសមភាព សម្រាប់ស្វែងរកតម្លៃបរមាធៀបក្នុងចំណោទ។

៦-ល្បឿន និង សំទុះនៃចលនា

ក)ល្បឿននៃចលនា

ល្បឿននៃចលនាមួយនៅខណៈ t គឺ $V(t)=S'(t)=\dfrac{dS}{dt}$

ដែល $S(t)$ ជាចម្ងាយចរនៅខណៈ t ។

ខ)សំទុះនៃចលនា

សំទុះនៃចលនានៅខណៈ t គឺ $a(t)=\frac{dV}{dt}=V'(t)$ ដែល $V(t)$

ជាល្បឿននៃចលនានៅខណៈ t ។

៧-ឌីផេរ៉ង់ស្យែល

និយមន័យ

បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានដេរីវេនោះឌីផេរ៉ង់ស្យែលកំណត់

ដោយ $dy=f'(x).dx$ ។

កាលណាតម្លៃ Δx កាន់តែតូចនោះ dy អាចជាតម្លៃប្រហែលនៃ Δy

គេបាន $f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta y\approx f(x)+dy=f(x)+f'(x).\Delta x$ ។

៨-វិសមភាពកំណើនមានកំណត់

ទ្រឹស្តីបទទី១

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ និង ជាប់ ហើយមានដេរីវេលើចន្លោះ I ។

បើមានពីរចំនួនពិត m និង M ដែលគ្រប់ $x\in I$: $m\le f'(x)\le M$

នោះគ្រប់ចំនួនពិត $a,b\in I$ ដែល $a<b$ គេបាន

$m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាងអនុគមន៍ g ដែល $g(x)=f(x)-mx$ មានដេរីវេលើ I

គេបាន $g'(x)=f'(x)-m\ge 0$ គ្រប់ $x\in I$ ព្រោះ $f'(x)\ge m$ នោះ g

ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ I ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a,b\in I$ ដែល $a<b$ គេបាន $g(a)\le g(b)$

ឬ $f(a)-ma\le f(b)-mb$ នោះ $f(b)-f(a)\ge m(b-a)$ (i)

តាងអនុគមន៍ h ដែល $h(x)=f(x)-Mx$ មានដេរីវេលើ I

គេបាន $h'(x)=f'(x)-M\le 0$ គ្រប់ $x\in I$ ព្រោះ $f'(x)\le M$ នោះ h

ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ I ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a,b\in I$ ដែល $a<b$ គេបាន $h(a)\geq h(b)$

ឬ $f(a)-Ma\geq f(b)-Mb$ នោះ $f(b)-f(a)\leq M(b-a)$ (ii)

តាមទំនាក់ទំនង $(i)\&(ii)$ គេបាន $m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី២

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ មានដេរីវេលើចន្លោះ $[a,b]$។

បើមានពីរចំនួនពិត M ដែលគ្រប់ $x\in[a,b]:|f'(x)|\leq M$ នោះគេបាន

$|f(b)-f(a)|\leq M.|b-a|$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេមានគ្រប់ $x\in[a,b]:|f'(x)|\leq M$ នោះគេទាញ $-M\leq f'(x)\leq M$

តាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់គេបាន ៖

ចំពោះ $a<b$ គេបាន $-M(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$ (1)

ចំពោះ $a>b$ គេបាន $-M(a-b)\leq f(a)-f(b)\leq M(a-b)$ (2)

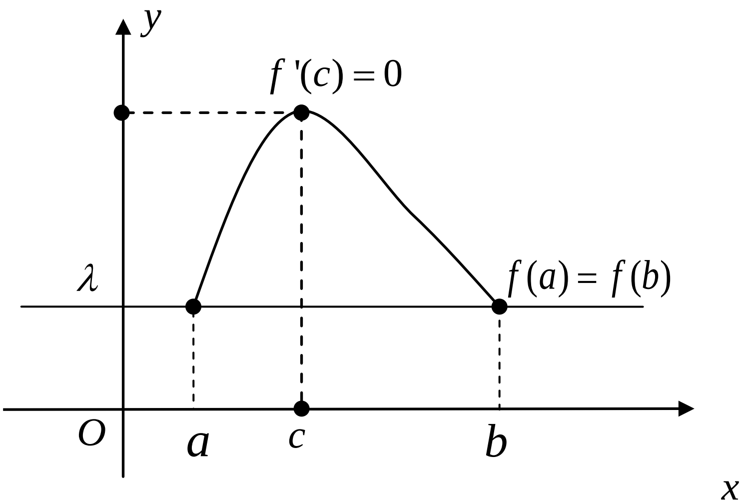
តាម(1)និង(2)គេបាន $|f(b)-f(a)|\leq M.|b-a|$ ។

ដូចនេះទ្រឹស្តីបទត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

៩-ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល

បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ មានដេរីវេលើចន្លោះ(a,b)

និង $f(a)=f(b)$នោះមានចំនួន $c\in(a,b)$ យ៉ាងតិចដែល $f'(c)=0$ ។



សម្រាយបញ្ជាក់

គេតាង $f(a)=f(b)=\lambda$

-ករណីទី១ បើ $f(x)=\lambda$ គ្រប់ $x\in[a,b]$ នោះ f ជាអនុគមន៍ថេរលើចន្លោះ $[a,b]$

និង $f'(x)=0$ គ្រប់ $x\in(a,b)$ ។

-ករណីទី២ បើ $f(x)>\lambda$ គ្រប់ $x\in[a,b]$ នោះ f មានតម្លៃអតិបរមាយ៉ាងតិចមួយត្រង់ $x=c$ ។ ដោយ f មានដេរីវេត្រង់ $x=c$ នោះ $f'(c)=0$

-ករណីទី៣ បើ $f(x)<\lambda$ គ្រប់ $x\in[a,b]$នោះ f មានតម្លៃអប្បបរមាយ៉ាងតិចមួយត្រង់ $x=c$ដោយ fមានដេរីវេត្រង់ $x=c$ នោះ $f'(c)=0$ ។

១០-ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម(ឬទ្រឹស្តីបទ Lagrange)

បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ មានដេរីវេលើចន្លោះ(a,b)

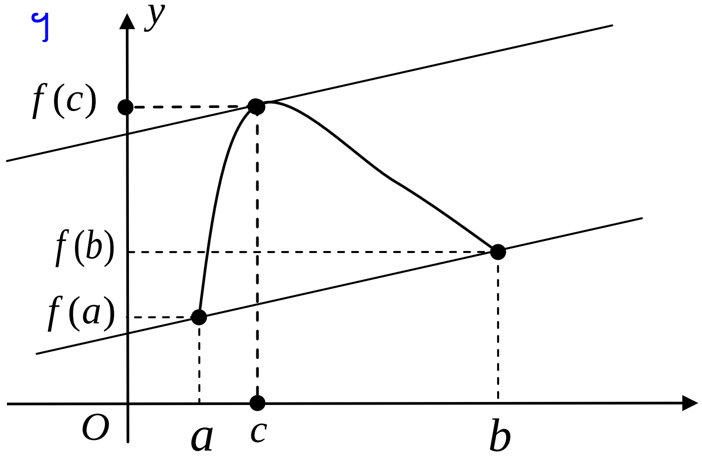
នោះមានចំនួន $c\in(a,b)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យក $g(x)=f(b)-f(x)-\lambda(b-x)$ ដែល $\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ។

នោះ g ជាអនុគមន៍ជាប់ក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ និង មានដេរីវេក្នុង(a,b) ហើយដោយ $g(a)=g(b)=0$នោះតាមទ្រឹស្តីបទរ៉ូលមាន $c\in(a,b)$មួយយ៉ាងតិចដែល $g'(c)=0$ ។ ដោយ $g'(c)=-f'(c)+\lambda$នោះ $f'(c)=\lambda$ ។

ដូចនេះ $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ។



១១-អនុវត្តន៍ដេរីវេក្នុងសេដ្ឋកិច្ច

យើងតាង $C=C(x)$ ជាអនុគមន៍ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារះ
ចំនួន x គ្រឿង ,
$R=R(x)$ ជាអនុគមន៍ចំណូលសរុបពីការលក់សម្ភារះចំនួន x គ្រឿង
និង $P=P(x)=R(x)-C(x)$ ជាអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញពីការលក់សម្ភារះ
ចំនួន x គ្រឿង

គេបាន $C'(x)$ ហៅថាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណាយបន្ថែម

$R'(x)$ ហៅថាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណូលបន្ថែម

$P'(x)$ ហៅថាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណេញបន្ថែម ។

មេរៀនទី០៥

អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

១-ព្រីមីទីវ

ក. និយមន័យ ៖

គេថាអនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើចន្លោះ I កាលណា ចំពោះគ្រប់ $x\in I$ គេមាន $F'(x)=f(x)$ ។

ខ. ទ្រឹស្តីបទ

បើអនុគមន៍ $F(x)$ និង $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើចន្លោះ I នោះគ្រប់ $x\in I$ គេមាន $F(x)=G(x)+C$ ដែល C:ជាចំនួនថេរ ។

២-អាំងតេក្រាលមិនកំនត់

ក.និយមន័យ

បើអនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ នោះអាំងតេក្រាលមិនកំនត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$កំនត់ដោយ $\int f(x).dx=F(x)+C$ ។

ដែល C:ជាចំនួនថេរ ។

ខ.លក្ខណះ

$a/\ \int k.f(x).dx=k.\int f(x).dx$

$b/\ \int\left[f(x)+g(x)\right].dx=\int f(x).dx+\int g(x).dx$

$c/\ \int\left[f(x)-g(x)\right].dx=\int f(x).dx-\int g(x).dx$

៣-រូបមន្តសំខាន់ៗអាំងតេក្រាលមិនកំនត់

1. $\int k.dx = kx + c$
2. $\int x^n.dx = \frac{1}{n+1}.x^{n+1} + c$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$
4. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$
6. $\int \sin x.dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x.dx = \sin x + c$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$
10. $\int e^x.dx = e^x + c$
11. $\int a^x.dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
12. $\int e^{ax}.dx = \frac{1}{a}.e^{ax} + c$
13. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}.\ln|ax+b| + c$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}.\sqrt{ax+b} + c$
15. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}.\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
16. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}.arctn(\frac{x}{a}) + c$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$
20. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}.\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$
21. $\int \cot x.dx = \ln|\sin x| + c$
22. $\int \tan x.dx = -\ln|\cos x| + c$
23. $\int \sin(ax).dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$
24. $\int \cos(ax).dx = \frac{1}{a}.\sin(ax) + c$

៤-រូបមន្តប្តូរអថេរ

សន្មតថាគេមានអាំងតេក្រាល ៖ $I = \int f[\phi(x)].\phi'(x).dx$

បើគេតាង $u = \phi(x)$ នាំអោយ $du = \phi'(x).dx$

គេបាន $I = \int f[\phi(x)].\phi'(x).dx = \int f(u).du = F(u) + c$ ។

៥-រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំនត់

1. $\int k.du = ku + c$
2. $\int u^n.du = \frac{1}{n+1}.u^{n+1} + c$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$
4. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c$
5. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c$
6. $\int e^u.du = e^u + c$
7. $\int \sin u.du = -\cos u + c$
8. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}.\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
9. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}.\arctan\frac{x}{a} + c$
10. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + c$
11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c$
12. $\int \tan u.du = -\ln|\cos u| + c$
13. $\int \cot u.du = \ln|\sin u| + c$
14. $\int a^u.du = \frac{a^u}{\ln a} + c$

៧-រូបមន្តអាំងតេក្រាលសំខាន់ៗគួរចងចាំ ៖

1. $\int k.P'(x).dx = k.P(x) + c$
2. $\int P^n(x).P'(x).dx = \frac{1}{n+1}.P^{n+1}(x) + c \quad , n \neq -1$
3. $\int \frac{P'(x)}{P(x)}.dx = \ln|P(x)| + c$
4. $\int \frac{P'(x)}{\sqrt{P(x)}}.dx = 2\sqrt{P(x)} + c$
5. $\int \frac{P'(x)}{P^2(x)}.dx = -\frac{1}{P(x)} + c$
6. $\int e^{P(x)}.P'(x).dx = e^{P(x)} + c$

៨-រូបមន្តគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ពីរ $u = u(x)$ និង $v = v(x)$

គេមាន $d(u.v) = v.du + u.dv$ (រូបមន្តឌីផេរ៉ង់ស្យែល)

គេបាន $\int d(u.v) = \int v.du + \int u.dv$

$$u.v = \int v.du + \int u.dv$$

ដូចនេះ $\int u.dv = u.v - \int v.du$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

មេរៀនទី០៦

អាំងតេក្រាលកំណត់

១-រូបមន្តញូតុន-ឡៃបនិច

អាំងតេក្រាលកំនត់ពី a ទៅ b នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាផលដក $F(b)-F(a)$ ។ ដែល $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។

គេកំនត់សរសេរ៖ $\int_a^b f(x).dx = \left[\ F(x)\ \right]_a^b = F(b)-F(a)$ ។

២-លក្ខណៈអាំងតេក្រាលកំនត់

ក) $\int_a^a f(x).dx = 0$

ខ) $\int_a^b f(x).dx = -\int_b^a f(x).dx$

គ) $\int_a^b k.f(x).dx = k.\int_a^b f(x).dx$

ឃ) $\int_a^b [f(x)+g(x)].dx = \int_a^b f(x).dx + \int_a^b g(x).dx$

ង) $\int_a^b [f(x)-g(x)].dx = \int_a^b f(x).dx - \int_a^b g(x).dx$

ច) $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(z).dz = \int_a^b f(t).dt$

៣-រូបមន្តប្តូរអថេរ

✍ សន្មតថាគេមាន $I=\int_a^b f(x).dx \quad (1)$

បើគេតាង $x=\phi(t)$ នាំអោយ $dx=\phi'(t).dt$ ហើយចំពោះ $x\in[a,b]$

នោះ $t\in[t_1,t_2]$ ។

ដូចនេះ $I=\int_a^b f(x).dx=\int_{t_1}^{t_2} f[\phi(t)].\phi'(t).dt$

✍ សន្មតថាគេមាន $I=\int_a^b f[\phi(x)].\phi'(x).dx \quad (2)$

បើគេតាង $u=\phi(x)$ នាំអោយ $du=\phi'(x).dx$

ចំពោះ $x\in[a,b]$ នោះ $u\in[\phi(a),\phi(b)]$

គេបាន $I=\int_a^b f[\phi(x)].\phi'(x).dx=\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u).du$

៤-រូបមន្តគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

$$\boxed{\int_a^b u.dv=[u.v]_a^b-\int_a^b v.du}$$

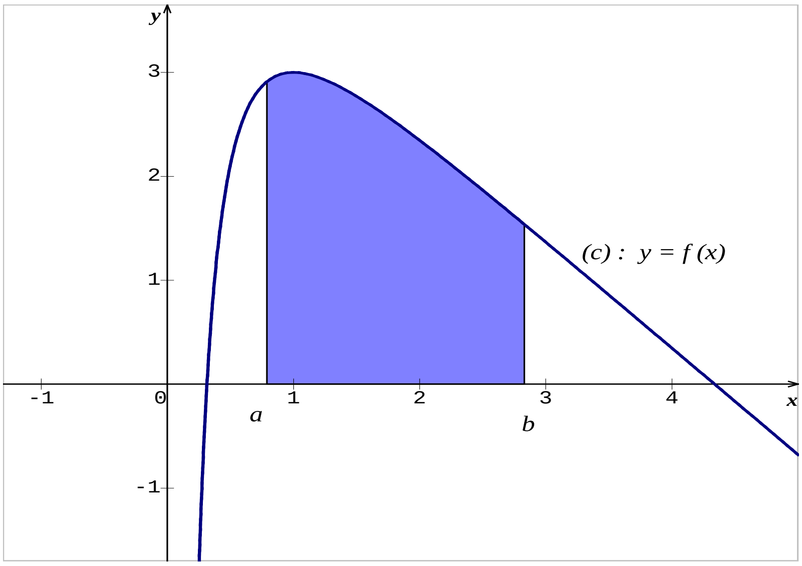
៥-គណនាក្រឡាផ្ទៃ

ក)ក្រឡាផ្ទៃខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ និង អក្ស័អាប់ស៊ីស ៖

ក្រឡាផ្ទៃខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $(C):y=f(x)$ ជាមួយអក្ស័អាប់ស៊ីស

$(x'ox)$ និង បន្ទាត់ $x=a$ និង $x=b$ កំនត់ដោយ ៖

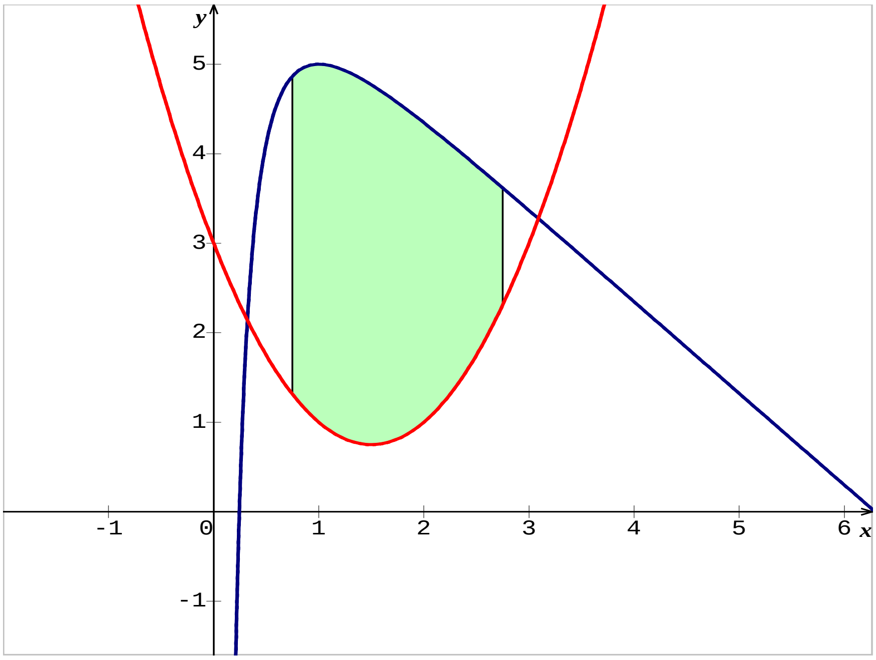
$$S=\int_a^b f(x).dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$



ខ)ក្រឡាផ្ទៃខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ

ក្រឡាផ្ទៃខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $(C_1): y=f(x)$ និង $(C_2): y=g(x)$ លើចន្លោះ $[a,b]$ ដែលគ្រប់ $x\in[a,b]: f(x)\geq g(x)$ កំនត់ដោយ ៖

$$S=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right].dx$$ ។



៦-គណនាមាឌសូលីដបរិវត្តន៍

ក)មាឌសូលីតបរិវត្តន៍កំនត់បានពីរង្វិលក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយ ខ្សែកោង $(c): y = f(x)$ ជុំវិញអក្សអាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ កំនត់ដោយ $V = \pi \times \int_a^b [f(x)]^2 .dx$ ។

ខ)មាឌសូលីតបរិវត្តន៍កំនត់បានពីរង្វិលក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ $(c_1): y = f(x)$ និង $(c_2): y = g(x)$ ជុំវិញអក្សអាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ កំនត់ដោយ $V = \pi \times \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x) \right] .dx$

ដែល $\left(\quad f(x) \geq g(x) \ , \forall x \in [a,b] \quad \right)$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

មេរៀនទី០៧

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

១.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីមួយ

ក. និយមន័យ ៖

សមីការឌីផេរង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ទីមួយមានមេគុណ

ថេរគឺជាសមីការដែលមានទំរង់ទូទៅជា $(E): y' - ay = 0 \quad , a \in \mathbb{R}$

ខ. ចំលើយសមីការ:

សមីការឌីផេរង់ស្យែលលំដាប់ទីមួយ $(E): y' - ay = 0 \quad , a \in \mathbb{R}$

មានចំលើយទូទៅជាអនុគមន៍ទំរង់ $y = f(x) = k.e^{ax}$

ដែល k ជាចំនួនពិត ។

២.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីពីរ

ក. និយមន័យ:

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែអុម៉ូសែនលំដាប់ទីពីរដែលមាន

មេគុណថេរគឺជាសមីការដែលមានទំរង់ទូទៅជា

$(E): ay''+by'+cy=0 \quad ,a\neq 0, a,b,c\in IR$ ។

ខ. សមីការសំគាល់:

សមីការសំគាល់របស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$ay''+by'+cy=0 \quad ,a\neq 0, a,b,c\in \mathbb{R}$

ជាសមីការដឺក្រេទីពីរដែលមានរាង $ar^2+br+c=0$ ។

គ. ចំលើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល:

ដើម្បីរកចំលើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$ay''+by'+cy=0 \quad ,a\neq 0, a,b,c\in \mathbb{R}$

គេត្រូវដោះស្រាយសមីការសំគាល់ $ar^2+br+c=0$ ។

-បើ $\Delta=b^2-4ac>0$

នោះសមីការសំគាល់មានឫសពីរ r_1 និង r_2 ក្នុងករណីនេះសមីការ

ឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានចំលើយទូទៅជាអនុគមន៍

$y=f(x)=A.e^{r_1x}+B.e^{r_2x}$ ដែល $A,B\in\mathbb{R}$ ។

-បើ $\Delta=b^2-4ac=0$ នោះសមីការសំគាល់មានឫសឌុប

$r_1 = r_2 = -\dfrac{b}{2a} = r_0$ ក្នុងករណីនេះសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមាន

ចំលើយទូទៅជាអនុគមន៍ ៖

$y = f(x) = (Ax + B).e^{r_0 x}$ ដែល $A, B \in \mathbb{R}$ ។

-បើ $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ នោះសមីការសំគាល់មានរឹសពីរជា

ចំនួនកំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ $r_1 = \alpha + i\beta$ និង $r_2 = \alpha - i\beta$

ក្នុងករណីនេះសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានចំលើយទូទៅជាអនុគមន៍

$y = f(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x).e^{\alpha x}$ ដែល $A, B \in \mathbb{R}$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានរាង

$$(E):\ y' - ay = E(x)\ ,$$

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះមានចម្លើយទូទៅ $y = y_e + y_p$ ដែល y_e

ជាចម្លើយនៃសមីការ $y' - ay = 0$ និង y_p ជាចម្លើយពិសេសមួយ

នៃសមីការ $y' - ay = E(x)$ ។

៤.របៀបដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានរាង

$$(E):\ ay'' + by' + cy = E(x) \text{ ដែល } a \neq 0$$

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះគេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

-ស្វែងរកចម្លើយពិសេសមិនអូម៉ូសែនតាងដោយ y_p នៃសមីការ

$ay''+by'+cy=E(x)$ ដែល y_pមានទម្រង់ដូច $E(x)$ ។

-រកចម្លើយទូទៅតាងដោយ y_hនៃសមីការលីនេអ៊ែអូម៉ូសែន

$ay''+by'+cy=0$ ។

-គេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ

$y=y_P+y_h$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

មេរៀនទី០៨

វិភាគលើបន្សំ

១-សំនុំ

សំនុំជាការប្រមូលផ្តុំនៃវត្ថុខុសៗគ្នាដែលបានកំណត់ច្បាស់លាស់

- ❖ វត្ថុនៃសំនុំហៅថាធាតុ ។
- ❖ កំណត់ច្បាស់លាស់មានន័យថាមានវិធានអាចឲ្យយើង

កំណត់បានថាវត្ថុដែលឲ្យជាធាតុនៃសំនុំ ។

សំនុំគ្មានធាតុហៅថា សំនុំទទេ ដែលគេតាងដោយ $\varnothing$ ។

គេឲ្យ A និង B ជាសំនុំពីរ ៖

- ❖ បើសំនុំ A និង B មានធាតុដូចគ្នា យើងថាសំនុំ A និង B ស្មើគ្នា ។

គេសរសេរ $A=B$ ។

- ❖ បើ $A\subseteq B$ យើងថា A ជាសំនុំរងនៃ B
- ❖ បើ $A\subset B$ យើងថា A ជាសំនុំរងផ្ទាល់នៃ B
- ❖ សំនុំទទេជាសំនុំរងនៃគ្រប់សំនុំ
- ❖ A ជាសំនុំរងនៃ A ខ្លួនវា

ឧទាហរណ៍ រកសំនុំរងនៃសំនុំ $A=\{x,y,z\}$ ។

-សំនុំរងគ្មានធាតុ $\varnothing$

-សំនុំរងមានមួយធាតុ :$\{x\},\{y\},\{z\}$

-សំនុំរងមានពីរធាតុ :$\{x,y\},\{y,z\},\{z,x\}$

-សំនុំរងមានបីធាតុ :$\{x,y,z\}$

ដូចនេះសំនុំមានបីធាតុមាន $2^3=8$ សំនុំរង ។

ជាទូទៅៈ សំនុំមាន n ធាតុមាន 2^n សំនុំរង ។

២-ប្រសព្វ និង ប្រជុំនៃសំនុំ

គេឲ្យ A និង B ជាសំនុំពីរ ៖

❖ប្រសព្វនៃសំនុំ A ជាមួយសំនុំ B តាងដោយ $A\cap B$ ជាសំនុំដែលជាធាតុរួមជារបស់សំនុំ A និង B ។

គេកំណត់សរសេរ $A\cap B=\{x/x\in A$ និង $x\in B\}$

❖ប្រជុំនៃសំនុំ A ជាមួយសំនុំ B តាងដោយ $A\cup B$ ជាសំនុំដែលមានធាតុជាធាតុ របស់ A ឬ ធាតុរបស់ B ធាតុរួមជារបស់សំនុំ A ផងនិង សំនុំ B ផង ។

គេកំណត់សរសេរ $A\cup B=\{x/x\in A$ ឬ $x\in B\}$

៣-បំពេញនៃសំនុំ

សំនុំបំពេញនៃសំនុំ E តាងដោយ $\overline{E}$ ជាសំនុំមានគ្រប់ធាតុដែលមិនមែនជាធាតុនៃសំនុំ E ។

ឧទាហរណ៍ៈ បើសំនុំសកល $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ និង $E=\{2,4,6,8\}$

នោះសំនុំបំពេញនៃសំនុំ E គឺ $\overline{E}=\{1,3,5,7,9\}$ ។

៤-រប្បាប់

ទ្រឹស្តីបទៈ បើ A និង B ជាសំនុំកំណត់បាននោះ

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

ដែល $n(A)$: ជាចំនួនធាតុឬកាឌីណាល់នៃសំនុំ A

$n(B)$: ជាចំនួនធាតុឬកាឌីណាល់នៃសំនុំ B

$n(A\cap B)$: ជាចំនួនធាតុឬកាឌីណាល់នៃសំនុំ $A\cap B$ ។

$n(A\cup B)$: ជាចំនួនធាតុឬកាឌីណាល់នៃសំនុំ $A\cup B$ ។

ទ្រឹស្តីបទ: បើ A និង B ជាសំនុំគ្មានធាតុរួមគ្នានោះគេបាន:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

៩-គោលការណ៍ រាប់ ចម្លាស់ និង បន្សំ

ក)គោលការណ៍រាប់:

បើ $E_1,E_2,....,E_p$ ជា p ព្រឹត្តិការណ៍កើតឡើងផ្សេងៗគ្នា ដែលចំពោះព្រឹត្តិការណ៍នីមួយមានចំនួនលទ្ធផលរៀងគ្នា $r_1,r_2,....,r_p$ នោះចំនួនលទ្ធផលសរុបនៃ p ព្រឹត្តិការណ៍នេះមាន $r_1\times r_2\times ...\times r_p$ ។

ខ)ចម្លាស់:

ចម្លាស់នៃ n ធាតុខុសៗគ្នាជាតម្រៀប(គិតលំដាប់)នៃ n ធាតុ
ដែលជាតុមួយ
នៅលំដាប់ទីមួយ ធាតុមួយទៀតនៅលំដាប់ទីពីរ និងបន្តបន្ទាប់ ។

ចំនួនចម្លាំនៃ n ធាតុមាន: $1\times 2\times 3\times ...\times n=n!$ ។

$n!$: អានថា n ហ្វាក់តូរ្យែល ដែល $0!=1$ ។

ជាទូទៅ: ចំនួនចម្លាស់ n ធាតុ យកម្តង p ធាតុមាន:

$$P(n,p)=\frac{n!}{(n-p)!}=n(n-1)...(n-p+1)$$ ។

គ)ចម្លាស់ដែលមានវត្ថុដូចគ្នា:

បើគេចម្លាស់ n វត្ថុ ដែលក្នុងនោះមាន p_1 វត្ថុប្រភេទទទី១, p_2 វត្ថុប្រភេទទី២, ... p_k វត្ថុប្រភេទទី k ដោយ $p_1+p_2+...+p_k=n$
នោះចំនួនចម្លាស់គឺ: $N=\dfrac{n!}{p_1!p_2!....p_k!}$ ។

ឃ)បន្សំ:

បន្សំគឺជាតម្រៀបមិនគិតលំដាប់ ។

ចំនួនបន្សំ n ធាតុខុសៗគ្នាចាប់យកម្តង p ធាតុ ($p \le n$)កំណត់

និង តាងដោយ ៖

$$C(n,p)=\frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ ឬ } C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ ឬ } {}_nC_p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

ឬ $\binom{n}{p}=\frac{n!}{(n-p)!}$ ។

ង)រូបមន្តទ្វេធាញូតុន:

$$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}\left[C(n,p)a^{n-p}b^p\right]=C(n,0)a^n+C(n,1)a^{n-1}b+....+C(n,n)b^n$$

ឬគេអាចសរសេរ ៖

$$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}\left(C_n^p a^{n-p}b^p\right)=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+...+C_n^nb^n$$

ច)ត្រីកោណប៉ាស្កាល់:

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

– –

– –

មេរៀនទី០៩

ប្រូបាប៊ីលីតេ

១-បញ្ញត្តិនៃប្រូបាប

ប្រូបាបមានសារៈសំខាន់នៅក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃរបស់យើង ដែលយើងប្រើប្រាស់វាសម្រាប់វាស់កម្រិតនៃភាពមិនទៀងទាត់។ កាលណាយើងគ្រោងធ្វើអ្វីមួយ កាលណាអ្នកឧតុនិយមទស្សន៍ទាយអាកាសធាតុឬក្រុមហ៊ុនជានារាប់រងធ្វើគោលនយោបាយរបស់ក្រុមហ៊ុនចាំបាច់ត្រូវប្រើប្រូបាបដើម្បីធ្វើសេចក្តីសម្រេចចិត្ត ឬ ធ្វើការជ្រើសរើស ។

ក)ព្រឹត្តិការណ៍ លំហសំណាក

ព្រឹត្តិការណ៍លំហសំណាកគឺជាសំនុំនៃលទ្ធផលអាចទាំងអស់ ។

ខ)រូបមន្តគោលនៃប្រូបាប

ក្នុងពិសោធន៍មួយ ដែលមានលំហសំណាកS ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ Aកើតឡើងកំណត់ដោយៈ

$$P(A)=\frac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}=\frac{n(A)}{n(S)}$$

ដោយ $A\subseteq S$ នោះគេបាន $0\le P(A)\le 1$ ។

-បើ $P(A)=0$ គេថាព្រឹត្តិការណ៍ A ជាព្រឹត្តិកាណ៍មិនអាចកើតមាន ។

-បើ $P(A)=1$ គេថាព្រឹត្តិការណ៍ A ជាព្រឹត្តិកាណ៍ប្រាកដជាកើតឡើង ។

២-វិធាននៃប្រូបាប

ដោយព្រឹត្តិការណ៍ជាសំនុំរងនៃលំហសំណាក យើងអាចប្រើប្រជុំប្រសព្វនិងបំពេញនៃព្រឹត្តិការណ៍ដើម្បីបង្កើតព្រឹត្តិការណ៍បន្ថែមទៀតដែលយើងហៅថាព្រឹត្តិការណ៍សមាស ។

គេឲ្យ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍កើតក្នុងលំហសំណាក S នោះគេបានៈ

ក)ប្រជុំព្រឹត្តិការណ៍ $A\cup B$

ជាព្រឹត្តិការណ៍កើនឡើងនៃគ្រប់លទ្ធផលដែលជាលទ្ធផលនៅក្នុង A ឬ B ឬទាំងពីរព្រឹត្តិការណ៍ ។

ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ $A\cup B$ (ព្រឹត្តិការណ៍ A ឬ B)កំណត់ដោយៈ

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ ។

បើព្រឹត្តិការណ៍ A និង B មិនចុះសម្រុងនឹងគ្នាគឺ $A\cap B=\varnothing$ នោះគេបានៈ

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ ។

ខ)ប្រសព្វព្រឹត្តិការណ៍ $A\cap B$

ជាព្រឹត្តិការណ៍កើតឡើងនៃគ្រប់លទ្ធផលដែលជាលទ្ធផលនៅក្នុង A ផង និង B ផង ។

គ)បំពេញព្រឹត្តិការណ៍

បើ $\overline{E}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនៃព្រឹត្តិការណ៍ E ជាព្រឹត្តិការណ៍នៃគ្រប់លទ្ធផលនៅក្នុងលំហសំណាក S ដែលមិននៅក្នុង E ។

ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍បំពេញ $\overline{E}$ នៃព្រឹត្តិការណ៍ E កំណត់ដោយៈ

$P(\overline{E})=1-P(E)$ ។

៣-ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ

ជួនកាល ការកើតឡើងនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយ មានឥទ្ធិពលលើប្រូបាប

នៃព្រឹត្តិការណ៍មួយទៀត និងការគណនាប្រូបាបនេះគឺលើមូលដ្ឋាន
នៃការសន្មតថាព្រឹត្តិការណ៍ពិសេសនោះកើតឡើង គេហៅថាប្រូបាប
មានលក្ខខណ្ឌ ។
និយមន័យប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ:
ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A ដោយដឹងថា មានព្រឹត្តិការណ៍
B បានកើតឡើងរួចហើយ ហៅថាប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ និងតាងដោយ
$P(A/B)$ អានថាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A ដោយបានដឹងព្រឹត្តិការណ៍ B
កើតឡើងរួចហើយ ។
រូបមន្តប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ:
$P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ដែល $P(B)\neq 0$ ។
វិធានផលគុណ: ចំពោះព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ដោយ $P(B)\neq 0$ គេបាន:
$P(A\cap B)=P(B)\times P(A/B)$ ។

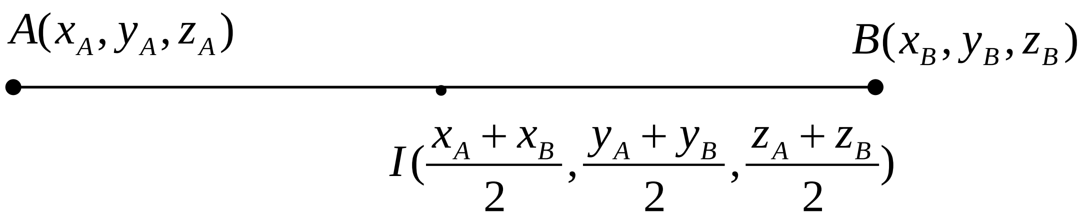
៨-ព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា ឬ មិនអាស្រ័យគ្នា

ព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ដែលអាស្រ័យនឹងគ្នាក្នុងវិធីដែលការកើតឡើងនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយមិនជាប់ពាក់ពន្ធ័នឹងការកើតឡើងនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយទៀត យើងហៅព្រឹត្តិការណ៍បែបនេះថាជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា ឬ មិនអាស្រ័យនឹងគ្នា។
យើងថា ព្រឹត្តិការណ៍ពីរ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា
លុះត្រាតែ $P(A/B)=P(A)$ ឬ $P(B/A)=P(B)$ ។
គេបាន $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ។
ជាទូទៅ: បើ $A_1,A_2,\ldots,A_n$ ជា n ព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នាពីរៗនោះគេបាន:
$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)\times P(A_2)\times P(A_3)\times\ldots\times P(A_n)$ ។

មេរៀនទី១០

ធរណីមាត្រវិភាគក្នុងលំហ

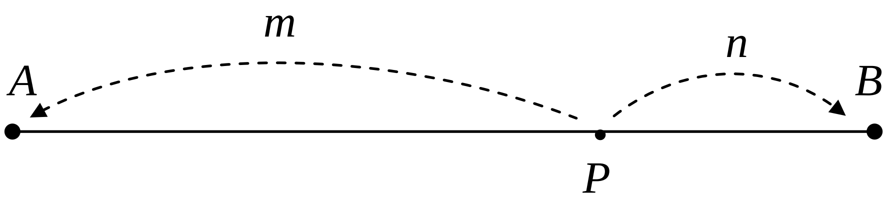
១-កូអរដោនេនៃចំណុចកណ្ដាលអង្កត់មួយក្នុងលំហ



កូអរដោនេចំណុច I កណ្ដាលអង្កត់ $[AB]$:

$$I\ (\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2})$$

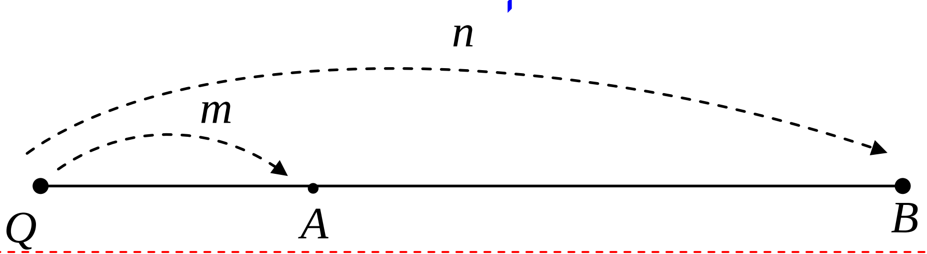
២-កូអរដោនេចំណុចចែកក្នុងអង្កត់មួយក្នុងលំហ



កូអរដោនេចំណុច P ចែកក្នុងអង្កត់ $[AB]$ តាមផលធៀប $\frac{PA}{PB}=\frac{m}{n}$

$$P\ (\frac{mx_B+nx_A}{m+n}, \frac{my_B+ny_A}{m+n}, \frac{mz_B+nz_A}{m+n})$$ ។

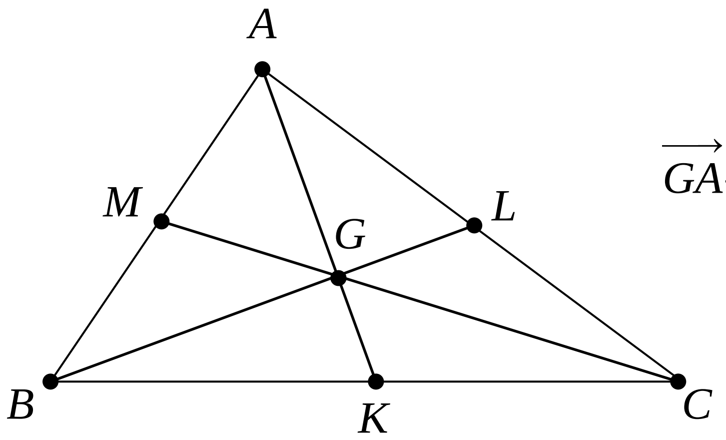
៣-កូអរដោនេចំណុចចែកក្រៅអង្កត់មួយក្នុងលំហ



កូអរដោនេចំណុច Q ចែកក្រៅអង្កត់ $[AB]$ តាមផលធៀប $\frac{QA}{QB} = \frac{m}{n}$

$$Q\ \left(\frac{mx_B - nx_A}{m-n}, \frac{my_B - ny_A}{m-n}, \frac{mz_B - nz_A}{m-n}\right)$$ ។

៨-កូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណមួយ

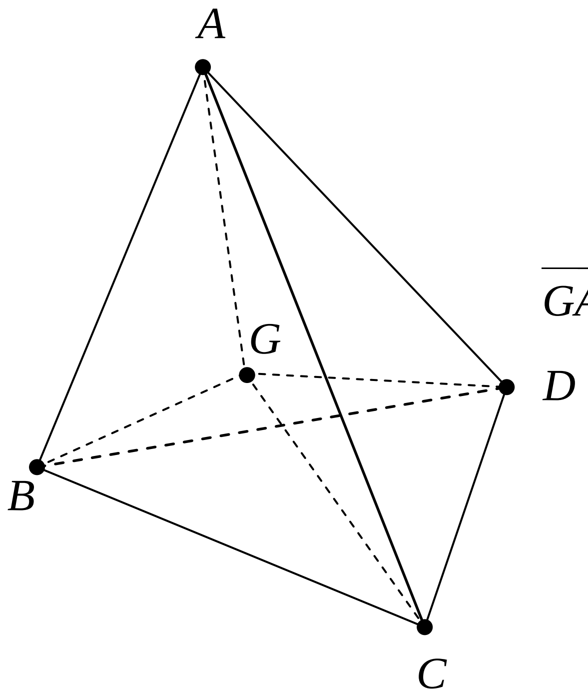


$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{O}$$

កូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់ G នៃត្រីកោណ ABC :

$$G\ \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_c}{3}\right)$$

៩-កូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់នៃតេត្រាអ៊ែតមួយ

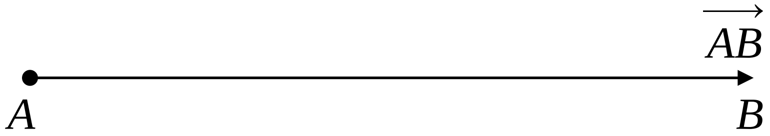


$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{O}$$

កូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់ G នៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4},\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4},\frac{z_A+z_B+z_c+z_D}{4}\right)$$

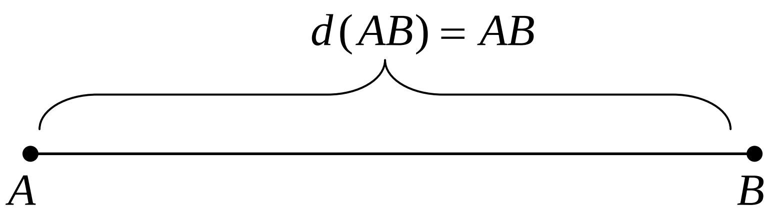
៦-កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រភ្ជាប់ដោយពីរចំណុច



កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ ដែលភ្ជាប់ដោយពីរចំណុច A និង B

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A\,,y_B-y_A,z_B-z_A)$$ ។

៧-ចម្ងាយរវាងពីរចំណុចក្នុងលំហ



ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច A និង B នៅក្នុងលំហកំណត់ដោយ ៖

$$d(AB)=AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$$ ។

៨-ប្រមាណវិធីវ៉ិចទ័រតាមកូអរដោនេនៅក្នុងលំហ

ឧបមាថាគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

ក) $\vec{u}=\vec{O} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=0 \\ u_2=0 \\ u_3=0 \end{cases}$

ខ) $\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=v_1 \\ u_2=v_2 \\ u_3=v_3 \end{cases}$

គ) $\vec{u}=\lambda\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\lambda v_1 \\ u_2=\lambda v_2 \\ u_3=\lambda v_3 \end{cases}$ ដែល $\lambda\in\mathbb{R}$ ។

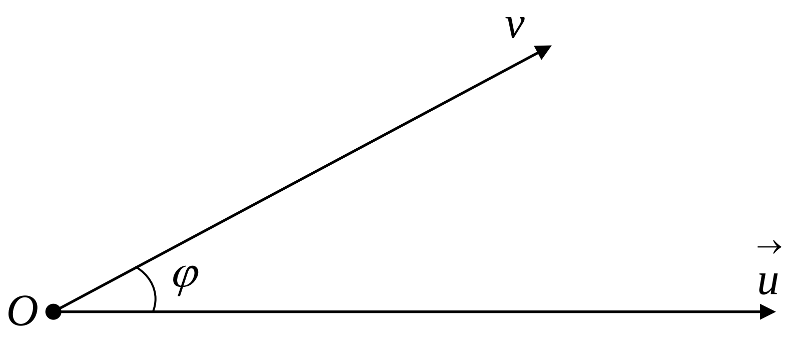
ឃ) $\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$

ង) $\vec{u}-\vec{v}=(u_1-v_1, u_2-v_2, u_3-v_3)$

ច) $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=(\lambda u_1+\mu v_1, \lambda u_2+\mu v_2, \lambda u_3+\mu v_3)$

ដែល $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ។

៩-ផលគុណស្កាលែក្នុងលំហ



ផលគុណស្កាលែរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ក្នុងលំហគឺជាចំនួនពិតកំណត់

សរសេរដោយ $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi$ ដែល φ ជាមុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$

១០-លក្ខណះផលគុណស្កាលែក្នុងលំហ

ក) $\vec{u}\cdot\vec{o} = \vec{o}\cdot\vec{u} = 0$

ខ) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

គ) $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^{\,2} = |\vec{u}|^2$

ឃ) $\lambda\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\lambda\vec{v} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$

ង) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

ច) $\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{w}$

ឆ) $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$

ជ) $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$

១១-កន្សោមវិភាគផលគុណស្កាលែក្នុងលំហ

ឧបមាថាគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

ស្ថិតនៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។

ផលគុណស្កាលែរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កំណត់ដោយ ៖

$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$ ។

១២-ណាម ឬ ប្រវែងវ៉ិចទ័រមួយ

បើ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ នោះ $|\vec{u}|=\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}$ ។

១៣-កូស៊ីនូសនៃមុំផ្គុំដោយពីរវ៉ិចទ័រ

ឧបមាថាគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

ស្ថិតនៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។

បើ φ ជាមុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ នោះគេបាន ៖

$$\cos\varphi=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}}$$ ។

១៤-វ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់ និង វ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែរ

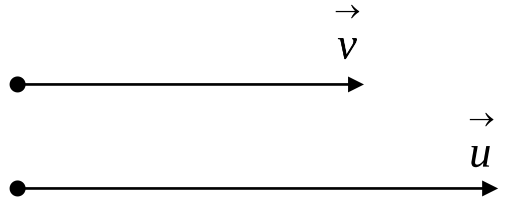
ក)វ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់

✍ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់គ្នាលុះត្រាតែ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ ។

✍ ឧបមាថាគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

គេបាន $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0$ ។

ខ) វ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែគ្នា



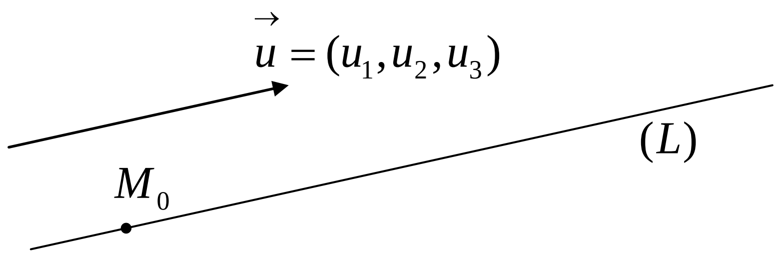
✍ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កូលីនេអ៊ែគ្នាលុះត្រាតែមានចំនួនពិត λ ដែល $\vec{u}=\lambda\,\vec{v}$

✍ ឧបមាថាគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

គេបាន $\vec{u}\,//\,\vec{v} \Leftrightarrow \frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=\frac{u_3}{v_3}$ ។

១៨-សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង សមីការឆ្លុះ

ក) សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ



បន្ទាត់ (L) មានមេគុណប្រាប់ទិស $\vec{u}=(\alpha,\beta,\gamma)$ ហើយកាត់តាមចំណុច

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រកំណត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \quad , t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

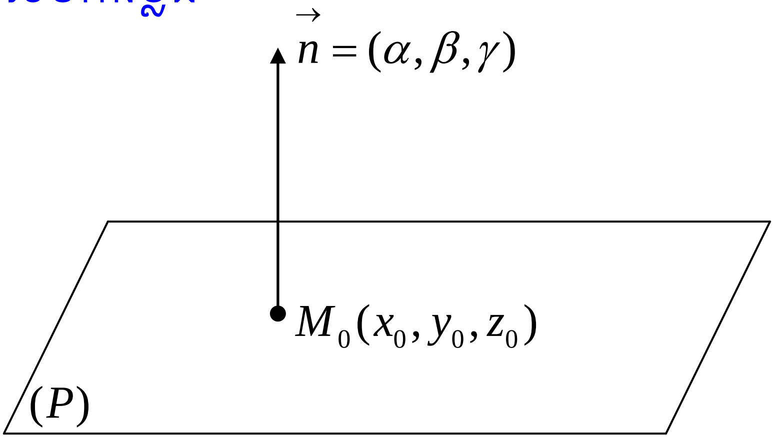
ខ)សមីការឆ្លុះ

បន្ទាត់(L) មានមេគុណប្រាប់ទិស $\vec{u} = (\alpha,\beta,\gamma)$ ហើយកាត់តាមចំណុច

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ មានសមីការឆ្លុះកំណត់ដោយ ៖

$$(L): \frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$$ ។

១៦-សមីការប្លង់

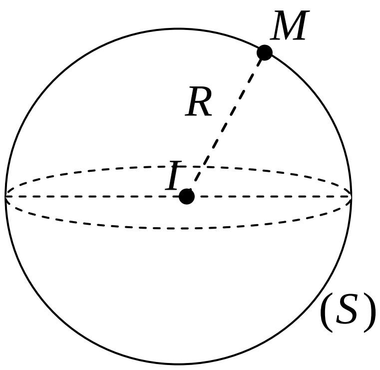


ប្លង់(p) ដែលកាត់តាមចំណុច$M_0(x_0,y_0,z_0)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រនរម៉ាល់

$\vec{n} = (\alpha,\beta,\gamma)$ កំណត់ដោយ ៖

$(p):\ \alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=0$ ។

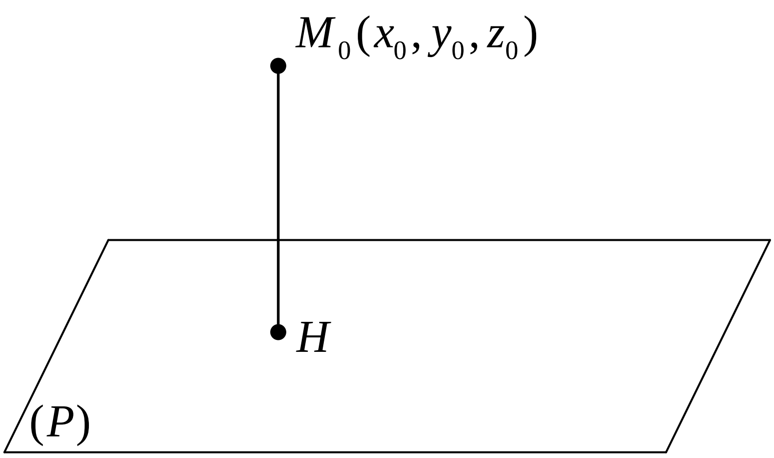
១៧-សមីការស្វ៊ែ



ស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $I(a,b,c)$ កាំ R មានសមីការស្តង់ដា ៖

$$(S):\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$ ។

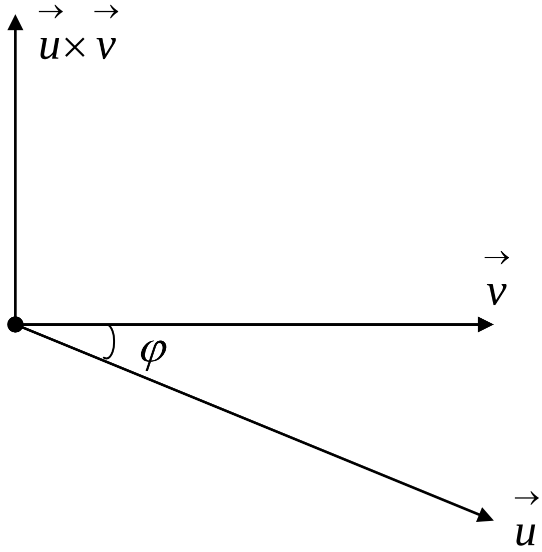
១៨-ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់



ចម្ងាយពីចំណុច $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ទៅប្លង់ $(p): ax+by+cz+d=0$

កំណត់ដោយ $d(M_0,(p))=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ។

១៩-ផលគុណវ៉ិចទ័រ



និយមន័យ

ផលគុណរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$

ក្នុងលំហកំណត់ដោយ ៖

$\vec{u}\times\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\varphi.\vec{k}$ ។

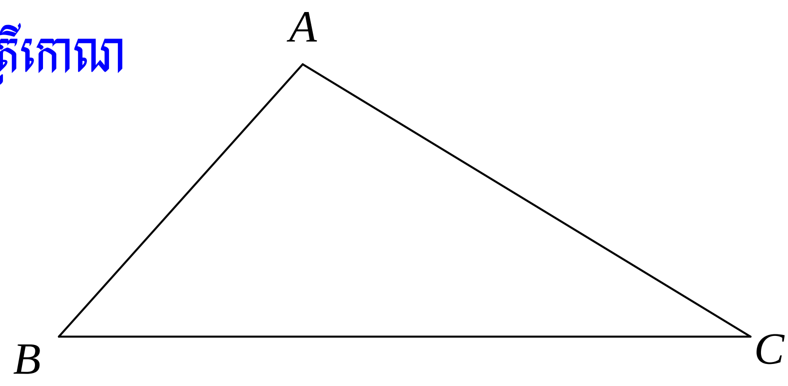
២០-កន្សោមផលគុណវ៉ិចទ័រក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន

ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ ។

ផលគុណរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កំណត់ដោយ ៖

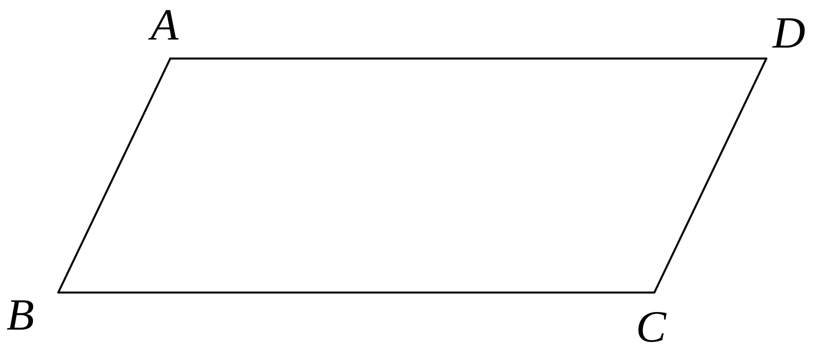
$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

២១-ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ



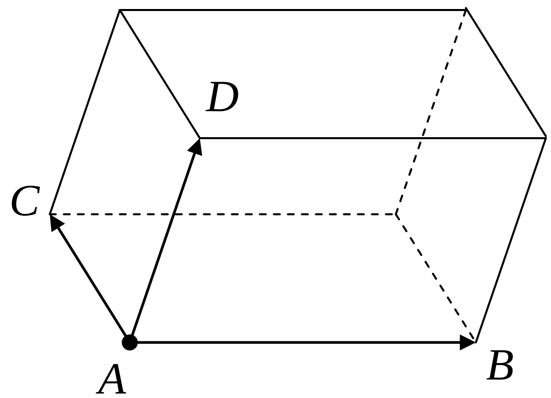
ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC កំណត់ដោយ $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

២២-ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម



ផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ កំណត់ដោយ

$$S_{ABCD}=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

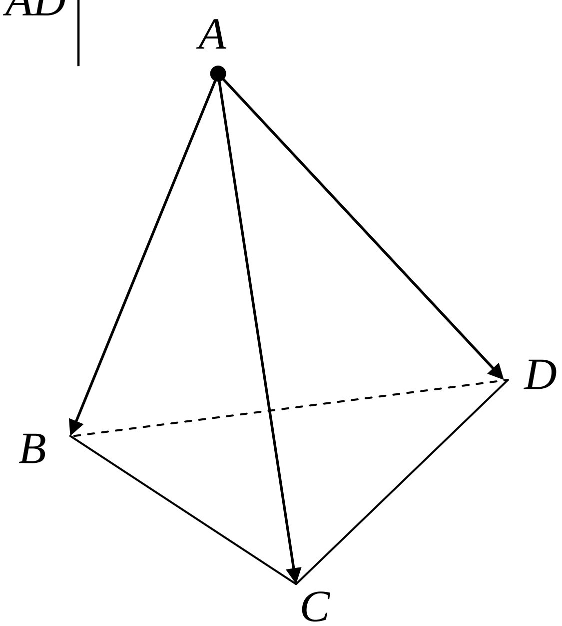


២៣-មាឌប្រលេពីប៉ែត

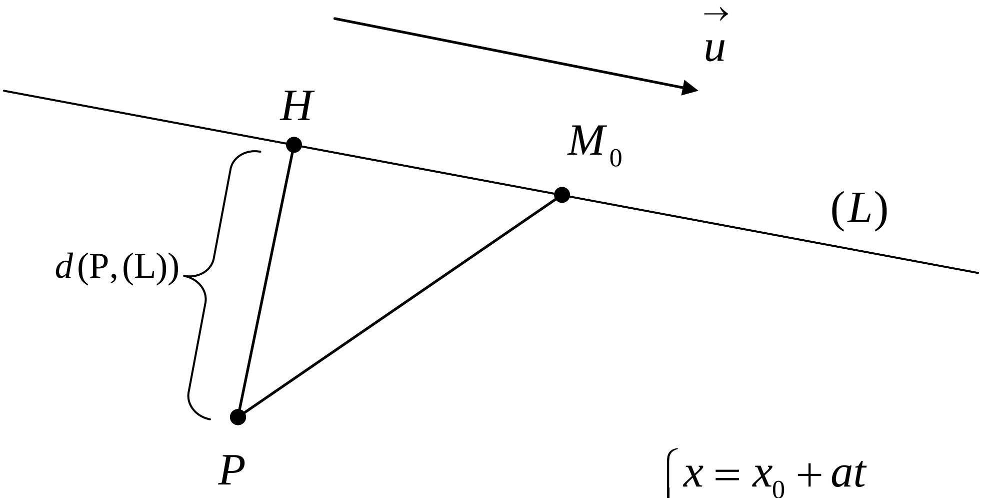
មាឌនៃប្រលេពីប៉ែត $V=\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AD}\right|$

២៤-មាឌតេត្រាអ៊ែត

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AD}\right|$$



២៥-ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅបន្ទាត់មួយក្នុងលំហ



ចម្ងាយពីចំណុច $P(\alpha,\beta,\gamma)$ ទៅបន្ទាត់ $(L):\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \ , t \in \mathbb{R} \end{cases}$

កំណត់ដោយ $d\left(P,(L)\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{M_0P} \times \vec{u}\right|}{|\vec{u}|}$

ដែល $\vec{u} = (a,b,c), \mathrm{M}_0(x_0,y_0,z_0)$ ។

www.mathtoday.wordpress.com