Phalkun's theorem

$$f(x) = \frac{ax^2 - c}{2ax + b}$$

$$u_{n+1} = \frac{a{u_n}^2 - c}{2au_n + b}$$

$$u_{n+1} = a{u_n}^2 + bu_n + c$$

$$u_{n+1} = \frac{a{u_n}^2 + bu_n + c}{p{u_n}^2 + qu_n + r}$$

www.mathtoday.wordpress.com

អារម្ភកថា

សួស្តីប្រិយមិត្តអ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យាជាទីរាប់អាន !
សៀវភៅ Phalkun's theorem ដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់អាននៅក្នុងដៃនេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបរៀងចងក្រងឡើងក្នុងគោលបំណងចង់បង្ហាញដល់អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យាទាំងអស់ នូវទ្រឹស្តីបទស៊ីតថ្មីដែលខ្ញុំបាទបានរកឃើញតាំងពីឆ្នាំ ២០១០មក ម្ល៉េះតាមរយៈនៃការស្រាវជ្រាវវិធីសាស្ត្រសម្រាប់ដោះស្រាយរកតួទូទៅនៃស៊ីតចំនួនពិតដែលគេស្គាល់រូបមន្តកំណើនរបស់វា ។ ជាលទ្ធផលនៃការស្រាវជ្រាវនេះបានជំរុញឲ្យខ្ញុំបាទរកឃើញគន្លឹះនៃការដោះស្រាយជាច្រើន ហើយឈានដល់ការបង្កើតទ្រឹស្តីបទថ្មីសម្រាប់ដោះស្រាយ ដូចបានសរសេរនៅក្នុងសៀវភៅនេះ ។

ខ្ញុំបាទសង្ឃឹមថាអ្នកស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យាទាំងអស់ ចូររួមគាំទ្រ និង ផ្សព្វផ្សាយទ្រឹស្តីបទទាំងនេះឲ្យបានទូលំទូលាយ សម្រាបជាប្រយោជន៍យកទៅប្រើប្រាស់នៅក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រនិង សំណូមពរដល់អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវទាំងអស់ ជួយស្រាវជ្រាវបន្តជាបន្ថែមទៀតអំពីទ្រឹស្តីបទផ្សេងៗទៀតដែលមានលក្ខណៈទូទៅជាងទ្រឹស្តីបទទាំងអស់ដែលខ្ញុំបាទបានរកឃើញនេះ ។

ជាទីបញ្ចប់ខ្ញុំសូមជូនពរដល់អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យាទាំងអស់មានសុខភាពល្អ និង ទទួលបានជ័យជំនះគ្រប់ពេលវេលានៅក្នុងឆាកជីវិតដ៏ខ្លីនេះ ។

បាត់ដំបង ថ្ងៃទី០៦ ខែសីហា ឆ្នាំ ២០១៥

អ្នកនិពន្ធ លឹម ផល្គុន

Tel: 017 250 290

មាតិការឿង

ទំព័រ

១-ចំណុចការេ 01

២-អនុគមន៍ Phalkun (Phalkun's function)........................…..................01

ក)និយមន័យ

ខ)ទ្រឹស្តីបទ

គ)សម្គាល់

ឃ)ការបង្កើតអនុគមន៍ Phalkun

៣-ស្វ៊ីត Phalkun (Phalkun's sequence)…………………………………………....…………...………..02

ក)និយមន័យ ៖

ខ)ទ្រឹស្តីបទ (Phalkun's theorem)

គ)សម្គាល់

ឃ)ការបង្កើតស្វ៊ីត Phalkun

៤-ស្វ៊ីតចំនួនពិតទម្រង់ $u_{n+1}=au_n^2+bu_n+c$ ………………………………....……………………...05

ក)និយមន័យ ៖

ខ)ទ្រឹស្តីបទ Phalkun (Phalkun's theorem)

៥-ស្វ៊ីតចំនួនពិតទម្រង់ $u_{n+1}=\dfrac{au_n^2+bu_n+c}{pu_n^2+qu_n+r}$ ……………………………………………………...06

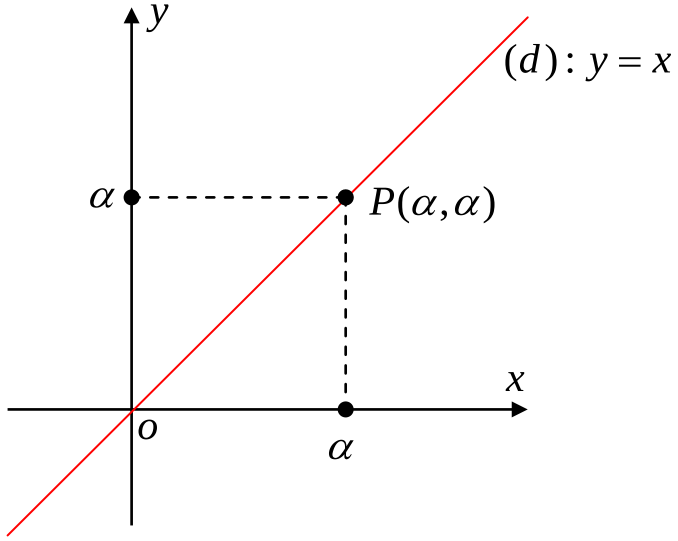
ទ្រឹស្តីបទទី១ (phalkun's theorem)

ទ្រឹស្តីបទទី២ (phalkun's theorem)

Phalkun’s theorem

១-ចំណុចភារេ

និយមន័យ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។ ចំណុច P ហៅថាចំណុចការេលុះត្រាតែវាស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ពុះទី១នៃអក្ស័កូអរដោនេ ។



២-អនុគមន៍ Phalkun (Phalkun’s function)

ក)និយមន័យ ៖

អនុគមន៍ K កំណត់ដោយ $K(x)=\dfrac{ax^2-c}{2ax+b}$ ដែល $a\neq 0\,,\,a,b,c\in\Re$ ដែលសមីការ $ax^2+bx+c=0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតហៅថាអនុគមន៍ Phalkun ។

ខ)ទ្រឹស្តីបទ ៖

អនុគមន៍ Phalkun ជាអនុគមន៍មានបរមាធៀបត្រង់ចំណុចការេពីរ $P(\alpha,\alpha)$ និង $Q(\beta,\beta)$ ដែល α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $ax^2+bx+c=0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេមាន $K'(x)=\dfrac{(ax^2-c)'(2ax+b)-(2ax+b)'(ax^2-c)}{(2ax+b)^2}=\dfrac{2a(ax^2+bx+c)}{(2ax+b)^2}$

ដោយសមីការ $ax^2+bx+c=0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតនោះអនុគមន៍ K មានចំណុចបរមាធៀបត្រង់ពីរចំណុច α និង β ដែល α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $ax^2+bx+c=0$ ។

ហើយ $K(\alpha)=\dfrac{a\alpha^2-c}{2a\alpha+b}=\alpha$ និង $K(\beta)=\dfrac{a\beta^2-c}{2a\beta+b}=\beta$ ព្រោះ $a\alpha^2+b\beta+c=0\ \&\ a\beta^2+b\beta+c=0$ ។

ដូចនេះទ្រឹស្តីបទត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

គ)សម្គាល់

ដោយ α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $ax^2+bx+c=0$ នោះ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=S$ និង $\alpha\beta=\frac{c}{a}=P$

នោះអនុគមន៍ Phalkun អាចសរសេរ $K(x)=\frac{x^2-P}{2x-S}$ ។

ឃ)ការបង្កើតអនុគមន៍ Phalkun

ឧទាហរណ៍ ចូរបង្កើតអនុគមន៍ Phalkun ដែលមានបរមាធៀបត្រង់ចំណុចការេ $P(-2,-2)$ និង $Q(5,5)$?

អនុគមន៍ផលគុណមានរាង $K(x)=\frac{x^2-P}{2x-S}$ ដែល $S=\alpha+\beta$ និង $P=\alpha\beta$

ដោយយើងដឹងថា K មានបរមាធៀបត្រង់ចំណុចការេ $P(-2,-2)$ និង $Q(5,5)$

នោះគេទាញ $\alpha=-2$, $\beta=5$ ។

គេបាន $S=\alpha+\beta=-2+5=3$ និង $P=\alpha\beta=(-2)(5)=-10$

ដូចនេះអនុគមន៍ Phalkun អាចសរសេរ $K(x)=\frac{x^2+10}{2x-3}$ ។

៣-ស្វ៊ីត Phalkun (Phalkun's sequence)

ក)និយមន័យ ៖

ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ $\begin{cases} u_0=\lambda \\ u_{n+1}=\frac{au_n^{\,2}-c}{2au_n+b} \end{cases}$; $n=0,1,2,\dots,\lambda\in\Re-\{-\frac{b}{a}\}$

ដែល $K(x)=\frac{ax^2-c}{2ax+b}$ ជាអនុគមន៍ Phalkun ហៅថាស្វ៊ីត Phalkun ។

ខ)ទ្រឹស្តីបទ (Phalkun's theorem)

តួទូទៅនៃស្វ៊ីត Phalkun កំណត់ដោយ $u_n=\beta+\frac{\beta-\alpha}{(\mu)^{2^n}-1}$ ដែល $\frac{\lambda-\alpha}{\lambda-\beta}=\mu$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយអនុគមន៍ Phalkun ជាអនុគមន៍មានបរមាធៀបត្រង់ចំណុចការេពីរ $P(\alpha,\alpha)$ និង $Q(\beta,\beta)$ ដែល α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $ax^2+bx+c=0$ នោះគេអាចសរសេរ ៖

$K(x)-\alpha=\frac{a(x-\alpha)^2}{2ax+b}$ និង $K(x)-\beta=\frac{a(x-\beta)^2}{2ax+b}$

គេទាញបាន $u_{n+1}-\alpha=\frac{a(u_n-\alpha)^2}{2au_n+b}$ (1) និង $u_{n+1}-\beta=\frac{a(u_n-\beta)^2}{2au_n+b}$ (2)

ធ្វើផលធៀប (1) និង (2) គេបាន $\frac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}-\beta}=\left(\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}\right)^2$ ហើយដោយតាង $v_n=\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$

គេបាន $v_{n+1}=v_n^{\,2}$ ។ តាមវិចារកំណើនគេបាន $v_n=(v_0)^{2^n}=\left(\dfrac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}\right)^{2^n}=\left(\dfrac{\lambda-\alpha}{\lambda-\beta}\right)^{2^n}=(\mu)^{2^n}$

ដែល $\dfrac{\lambda-\alpha}{\lambda-\beta}=\mu$ ។ តាម $v_n=\dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ គេទាញ $u_n=\dfrac{\beta v_n-\alpha}{v_n-1}=\dfrac{\beta(\mu)^{2^n}-\alpha}{(\mu)^{2^n}-1}=\beta+\dfrac{\beta-\alpha}{(\mu)^{2^n}-1}$ ។

ឧទាហរណ៍១ គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$u_{n+1}=\dfrac{u_n^2-6}{2u_n-5}$ និង $u_0=4$ ដែល $n=0,1,2,...$ ។ គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ?

គេមាន $a=1, b=-5, c=6$ ហើយ α , β ជាឫសសមីការ $x^2-5x+6=0$

គេបាន $\alpha=2, \beta=3$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ Phalkun គេបាន $u_n=\beta+\dfrac{\beta-\alpha}{(\mu)^{2^n}-1}$ ដែល $\mu=\dfrac{4-2}{4-3}=2$

ដូចនេះ $u_n=3+\dfrac{1}{2^{2^n}-1}$ ។

ឧទាហរណ៍២ គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$u_{n+1}=\dfrac{u_n^2-1}{2u_n-4}$ និង $u_0=4+\sqrt{3}$ ដែល $n=0,1,2,...$ ។ គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ?

គេមាន $a=1, b=-4, c=1$ ហើយ α , β ជាឫសសមីការ $x^2-4x+1=0$

គេបាន $\alpha=2-\sqrt{3}, \beta=2+\sqrt{3}$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ Phalkun គេបាន $u_n=\beta+\dfrac{\beta-\alpha}{(\mu)^{2^n}-1}$

ដែល $\mu=\dfrac{4+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}-2-\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$ ដូចនេះ $u_n=2+\sqrt{3}+\dfrac{2\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^{2^n}-1}$ ។

គ)*សម្គាល់* ទ្រឹស្តីបទ Phalkun ខាងលើអាចអនុវត្តន៍បានចំពោះ α & β ជាចំនួនកុំផ្លិច ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$u_{n+1}=\dfrac{u_n^2-4}{2u_n-2}$ និង $u_0=2$ ដែល $n=0,1,2,...$ ។ គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ?

គេមាន $a=1, b=-2, c=4$ ហើយ α , β ជាឫសសមីការ $x^2-2x+4=0$

ដោយ $\Delta'=1-4=-3=3i^2$ គេបាន $\alpha=1-i\sqrt{3}, \beta=1+i\sqrt{3}$

គេមាន $u_{n+1}-(1-i\sqrt{3})=\dfrac{u_n^2-4}{2u_n-2}-(1-i\sqrt{3})=\dfrac{[u_n-(1-i\sqrt{3})]^2}{2u_n-2}$ (1)

ហើយ $u_{n+1}-(1+i\sqrt{3})=\dfrac{u_n^2-4}{2u_n-2}-(1+i\sqrt{3})=\dfrac{[u_n-(1+i\sqrt{3})]^2}{2u_n-2}$ (2)

យក(1)ចែកនឹង(2)គេបាន $\dfrac{u_{n+1}-(1-i\sqrt{3})}{u_{n+1}-(1+i\sqrt{3})}=\left[\dfrac{u_n-(1-i\sqrt{3})}{u_n-(1+i\sqrt{3})}\right]^2$ (3)

តាង $v_n=\dfrac{u_n-(1-i\sqrt{3})}{u_n-(1+i\sqrt{3})}$ តាម(3)គេបាន $v_{n+1}=v_n^{\,2}$ ។ ដោយប្រើកំណើនគេបាន $v_n=(v_0)^{2^n}$

គេមាន $v_0 = \dfrac{u_0-(1-i\sqrt{3})}{u_0-(1+i\sqrt{3})} = \dfrac{2-(1-i\sqrt{3})}{2-(1+i\sqrt{3})} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \dfrac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{2e^{-\frac{i\pi}{3}}} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

គេទាញ $v_n = (v_0)^{2^n} = e^{\frac{2^{n+1}i\pi}{3}}$ ដោយ $v_n = \dfrac{u_n-(1-i\sqrt{3})}{u_n-(1+i\sqrt{3})}$ នោះគេទាញបាន

$u_n = \dfrac{(1-i\sqrt{3})-(1+i\sqrt{3})v_n}{1-v_n} = 1-i\sqrt{3}\dfrac{1+v_n}{1-v_n}$ (4)

គេមាន $1+v = 1+e^{\frac{2^{n+1}i\pi}{3}} = 2e^{i\frac{2^n\pi}{3}}\cos\dfrac{2^n\pi}{3}$ និង $1-v = 1-e^{\frac{2^{n+1}i\pi}{3}} = 2ie^{i\frac{2^n\pi}{3}}\sin\dfrac{2^n\pi}{3}$

តាម(4)គេទាញបាន $u_n = 1-\sqrt{3}\cot\dfrac{2^n\pi}{3}$ ។

ឃ)ការបង្កើតស្វ៊ីត Phalkun

ឧទាហរណ៍ ចូរបង្កើតស្វ៊ីត Phalkunមួយគឺ (u_n) ដែលមានតួដំបូង $u_0 = 2015$ ហើយអនុគមន៍ Phalkun មានបរមាធៀបត្រង់ចំណុចការេ $P(1,1)$ និង $Q(5,5)$?

អនុគមន៍ផលគុណមានរាង $K(x) = \dfrac{x^2-P}{2x-S}$ ដែល $S = \alpha+\beta$ និង $P = \alpha\beta$

ដោយយើងដឹងថា K មានបរមាធៀបត្រង់ចំណុចការេ $P(1,1)$ និង $Q(5,5)$

នោះគេទាញ $\alpha = 1$, $\beta = 5$ ។

គេបាន $S = \alpha+\beta = 1+5 = 6$ និង $P = \alpha\beta = (1)(5) = 5$

អនុគមន៍ Phalkun អាចសរសេរ $K(x) = \dfrac{x^2-5}{2x-6}$ ។

ដូចនេះស្វ៊ីត Phalkunដែលត្រូវបង្កើតគឺ $\begin{cases} u_0 = 2015 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\ 2}-5}{2u_n-6} \ ; n = 0,1,2,3,.... \end{cases}$ ។

ប្រតិបត្តិ ៖

ចូរបង្កើតស្វ៊ីត Phalkunមួយគឺ (u_n) ដែលមានតួដំបូង u_0 ហើយអនុគមន៍ Phalkun មានបរមាធៀបត្រង់ចំណុចការេ P និង Q ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម ៖

1) $u_0 = 1$; $P(2,2)$; $Q(7,7)$

2) $u_0 = 7$; $P(3,3)$; $Q(5,5)$

3) $u_0 = 5$; $P(-1,-1)$; $Q(4,4)$

4) $u_0 = -3$; $P(-1,-1)$; $Q(1,1)$

៤-ស្វ៊ីតចំនួនពិតទម្រង់ $u_{n+1} = au_n^2 + bu_n + c$

ក)និយមន័យ ៖

ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់រូបមន្តកំណើន $u_{n+1} = au_n^2 + bu_n + c$, $a \neq 0$, $a,b,c \in \Re$ ហៅថា ស្វ៊ីតត្រីធាដឺក្រេទីពីរ ។

ខ)ទ្រឹស្តីបទ Phalkun (Phalkun's theorem)

ឧបមាថាស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់រូបមន្តកំណើន $u_{n+1} = au_n^2 + bu_n + c$, $a \neq 0$, $a,b,c \in \Re$ និងមានតួដំបូង u_0 ដែល $n = 0,1,2,3......$ ។

បើអនុគមន៍ $f(x) = ax^2 + bx + c$ មានបរមាធៀបត្រង់ចំណុចការេ $P(\alpha,\alpha)$ នោះតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n = \dfrac{(u_0 - \alpha)^{2^n}}{a} + \alpha$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេមាន $u_{n+1} = au_n^2 + bu_n + c = a\left(u_n + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ (1)

ដោយអនុគមន៍ $f(x) = ax^2 + bx + c$ មានបរមាធៀបត្រង់ចំណុចការេ $P(\alpha,\alpha)$ នោះគេបាន

$$\begin{cases} f'(\alpha) = 0 \\ f(\alpha) = \alpha \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} 2a\alpha + b = 0 \\ a\alpha^2 + b\alpha + c = \alpha \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} \dfrac{b}{2a} = -\alpha \\ \dfrac{4ac - b^2}{4a} = \alpha \end{cases}$$

ទំនាក់ទំនង (1) អាចសរសេរ $u_{n+1} = a(u_n - \alpha)^2 + \alpha$ (2)

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = a(u_n - \alpha)$ គេបាន $v_{n+1} = a(u_{n+1} - \alpha)$ (3)

យក(2)ជួសក្នុង (3)គេបាន $v_{n+1} = v_n^2$ ហើយដោយធ្វើវិចារតាមកំណើនគេបាន $v_n = (v_0)^{2^n}$

ដោយ $v_0 = u_0 - \alpha$ នោះ $v_n = (u_0 - \alpha)^{2^n}$ ហើយ $v_n = a(u_n - \alpha)$ នោះគេទាញ $u_n = \dfrac{v_n}{a} + \alpha$

ដូចនេះ $u_n = \dfrac{(u_0 - \alpha)^{2^n}}{a} + \alpha$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n + 2 \text{ ; } n = 0,1,2,... \end{cases}$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ?

យក $f(x) = x^2 + 4x + 2$ នោះ $f'(x) = 2x + 4$

បើ $f'(x) = 0$ នោះ $2x + 4 = 0$ ឬ $x = -2$ ហើយ $f(-2) = 4 - 8 + 2 = -2$

គេទាញថា f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ចំណុចការេ $P(-2,-2)$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ Phalkun

គេបាន $u_n = \dfrac{(u_0 - \alpha)^{2^n}}{a} + \alpha = 3^{2^n} - 2$ ព្រោះ $a = 1$, $u_0 = 1$, $\alpha = -2$ ។

៥-ស្វ៊ីតចំនួនពិតទម្រង់ $u_{n+1}=\dfrac{au_n^2+bu_n+c}{pu_n^2+qu_n+r}$

ឧបមាថាគេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយរូបមន្តកំណើន

$u_{n+1}=\dfrac{au_n^2+bu_n+c}{pu_n^2+qu_n+r}$ និងតួដំបូង u_0 ដែល $n=0,1,2,3,\dots$ ។

យក $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ ដែល $a,b,c,p,q,r\in\Re$ ហើយ a និង p មិនសូន្យព្រមគ្នា។

ទ្រឹស្តីបទទី១ (phalkun's theorem)

បើអនុគមន៍ f

មានបរមាធៀបត្រង់ចំណុចការេ $P(\alpha,\alpha)$ និង $Q(\alpha,\alpha)$ នោះតួទូទៅនៃស្វ៊ីតកំណត់ដោយ

$u_n=\beta+\dfrac{(\beta-\alpha)\lambda}{(\mu)^{2^n}-\lambda}$ ដែល $\lambda=\dfrac{a-p\alpha}{a-p\beta}$ និង $\mu=\lambda\dfrac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$

សម្រាយបញ្ជាក់

f មានបរមាធៀបត្រង់ចំណុច $x=\alpha$ និង $x=\beta$ ដែល $f(\alpha)=\alpha$ និង $f(\beta)=\beta$

នោះបន្ទាត់ $y=\alpha$ និង $y=\beta$ ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) តាង f ត្រង់ $x=\alpha$ និង $x=\beta$

គេបានសមីការ $f(x)=\alpha$ និង $f(x)=\beta$ សុទ្ធតែមាន $x=\alpha$ និង $x=\beta$ ជាឫសឌុប

ក្នុងករណីនេះគេអាចសរសេរ

$f(x)-\alpha=\dfrac{(a-p\alpha)(x-\alpha)^2}{px^2+qx+r}$ និង $f(x)-\beta=\dfrac{(a-p\beta)(x-\beta)^2}{px^2+qx+r}$ ។

ដោយគេមាន $u_{n+1}=\dfrac{au_n^2+bu_n+c}{pu_n^2+qu_n+r}=f(u_n)$ នោះគេទាញបាន ៖

$u_{n+1}-\alpha=\dfrac{(a-p\alpha)(u_n-\alpha)^2}{pu_n^2+qu_n+r}$ (1) និង $u_{n+1}-\beta=\dfrac{(a-p\beta)(u_n-\beta)^2}{pu_n^2+qu_n+r}$ (2)

យក (1) ចែកនឹង (2) គេបាន $\dfrac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}-\beta}=\lambda\left(\dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}\right)^2$ ដែល $\lambda=\dfrac{a-p\alpha}{a-p\beta}$

តាង $v_n=\lambda\dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ នោះ $v_{n+1}=\lambda\dfrac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}-\beta}=\left(\lambda\dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}\right)^2=v_n^2$

ដោយធ្វើវិចារតាមកំណើនគេបាន $v_n=(v_0)^{2^n}=\left(\lambda\dfrac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}\right)^{2^n}=(\mu)^{2^n}$

ដោយ $v_n=\lambda\dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ នោះ $u_n=\dfrac{\beta v_n-\alpha\lambda}{v_n-\lambda}=\beta+\dfrac{(\beta-\alpha)\lambda}{v_n-\lambda}$ ដោយ $v_n=(\mu)^{2^n}$

គេបាន $u_n=\beta+\dfrac{(\beta-\alpha)\lambda}{(\mu)^{2^n}-\lambda}$ ដែល $\mu=\lambda\dfrac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី២ (phalkun's theorem)

បើអនុគមន៍ f មានបរមាធៀបត្រង់ចំណុច $x=\alpha$ និង $x=\beta$ ដែល $f(\alpha)=\beta$ និង $f(\beta)=\alpha$ នោះតួទូទៅនៃស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $u_n=\beta+\dfrac{\beta-\alpha}{\sqrt[3]{\lambda}(\mu)^{(-2)^n}-1}$ ។

ដែល $\lambda=\dfrac{a-p\alpha}{a-p\beta}$ និង $\mu=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}\dfrac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

f មានបរមាធៀបត្រង់ចំណុច $x=\alpha$ និង $x=\beta$ ដែល $f(\alpha)=\beta$ និង $f(\beta)=\alpha$ នោះបន្ទាត់ $y=\beta$ និង $y=\alpha$ ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) តាង f ត្រង់ $x=\alpha$ និង $x=\beta$ គេបានសមីការ $f(x)=\beta$ និង $f(x)=\alpha$ សុទ្ធតែមាន $x=\alpha$ និង $x=\beta$ ជាឫសឌុប ក្នុងករណីនេះគេអាចសរសេរ

$$f(x)-\beta=\frac{(a-p\beta)(x-\alpha)^2}{px^2+qx+r} \text{ និង } f(x)-\alpha=\frac{(a-p\alpha)(x-\beta)^2}{px^2+qx+r} \text{ ។}$$

ដោយគេមាន $u_{n+1}=\dfrac{au_n{}^2+bu_n+c}{pu_n{}^2+qu_n+r}=f(u_n)$ នោះគេទាញបាន ៖

$$u_{n+1}-\beta=\frac{(a-p\beta)(u_n-\alpha)^2}{pu_n{}^2+qu_n+r}\ (1) \text{ និង } u_{n+1}-\alpha=\frac{(a-p\alpha)(u_n-\beta)^2}{pu_n{}^2+qu_n+r}\ (2)$$

យក (2) ចែកនឹង (1) គេបាន $\dfrac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}-\beta}=\lambda\left(\dfrac{u_n-\beta}{u_n-\alpha}\right)^2$ ដែល $\lambda=\dfrac{a-p\alpha}{a-p\beta}$

តាង $v_n=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}\dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ នោះ $v_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}\dfrac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}-\beta}=\left(\sqrt[3]{\lambda}\,\dfrac{u_n-\beta}{u_n-\alpha}\right)^2=\dfrac{1}{v_n{}^2}$

ដោយធ្វើវិចារតាមកំណើនគេបបាន $v_n=(v_0)^{(-2)^n}=\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}\dfrac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}\right)^{(-2)^n}=(\mu)^{(-2)^n}$

ដែល $\mu=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}\dfrac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$ ។

ដោយ $v_n=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}\dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ នោះ $u_n=\dfrac{\beta\sqrt[3]{\lambda}\,v_n-\alpha}{\sqrt[3]{\lambda}v_n-1}=\beta+\dfrac{\beta-\alpha}{\sqrt[3]{\lambda}v_n-1}$ ដោយ $v_n=(\mu)^{(-2)^n}$

ដូចនេះ $u_n=\beta+\dfrac{\beta-\alpha}{\sqrt[3]{\lambda}(\mu)^{(-2)^n}-1}$ ។

ឧទាហរណ៍១

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n^{\ 2} - 4u_n}{u_n^{\ 2} - 2} \end{cases}$ ដែល $n = 0\,,1\,,2,3,...$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យក $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x}{x^2 - 2}$ មានរាង $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$

ដែល $a = 3, b = -4\,, c = 0\,, p = 1\,, q = 0\,, r = -2$ ។

គេមាន $f'(x) = \dfrac{(6x-4)(x^2-2) - 2x(3x^2 - 4x)}{(x^2-2)^2} = \dfrac{4x^2 - 12x + 8}{(x^2-2)^2}$

បើ $f'(x) = 0$ នោះ $4x^2 - 12x + 8 = 0$ មានរឹស $x_1 = 1, x_2 = 2$ ។

អនុគមន៍ f មានអតិបរិមាធៀបត្រង់ $x = 1$ គឺ $f(1) = \dfrac{3-4}{1-2} = 1$ និងមានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 2$ គឺ $f(2) = \dfrac{12-8}{4-2} = 2$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទទី១ តួទូទៅនៃស្វ៊ីតគឺ $u_n = \beta + \dfrac{(\beta - \alpha)\lambda}{(\mu)^{2^n} - \lambda}$ ដែល $\alpha = 1\,; \beta = 2$

ហើយ $\lambda = \dfrac{a - p\alpha}{a - p\beta} = \dfrac{3-1}{3-2} = 2$ និង $\mu = \lambda \dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} = 2.\dfrac{3-1}{3-2} = 4$

ដូចនេះ $u_n = 2 + \dfrac{(2-1)(2)}{(4)^{2^n} - 2} = 2 + \dfrac{2}{2^{2^{n+1}} - 2} = \dfrac{2^{2^{n+1}+1} - 2}{2^{2^{n+1}} - 2}$ ។

ឧទាហរណ៍២

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n^{\ 2} - 34u_n + 53}{u_n^{\ 2} - 10u_n + 17} \end{cases}$ ដែល $n = 0\,,1\,,2\,,3,...$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ? (ប្រើទ្រឹស្តីបទទី២)

ចម្លើយ $\alpha = 1\,, \beta = 3\,, a = 5\,, b = -34\,, c = 53, p = 1\,, q = -10\,, r = 17$

$\lambda = \dfrac{a - p\alpha}{a - p\beta} = \dfrac{5-1}{5-3} = 2$ និង $\mu = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda}} \dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}.\dfrac{4-1}{4-3} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$

$u_n = \beta + \dfrac{\beta - \alpha}{\sqrt[3]{\lambda}(\mu)^{(-2)^n} - 1} = 3 + \dfrac{2}{\sqrt[3]{2}\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)^{(-2)^n} - 1}$ ។

ឧទាហរណ៍៣

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n{}^2 + 2}{2u_n - 1} \end{cases}$ ដែល $n = 0,1,2,3,...$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យក $f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x-1}$ មានរាង $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$

ដែល $a=1, b=0, c=2, p=0, q=2, r=-1$ ។

គេមាន $f'(x) = \dfrac{2x(2x-1)-2(x^2+2)}{(2x-1)^2} = \dfrac{2(x^2-x-2)}{(2x-1)^2}$

បើ $f'(x)=0$ នោះ $x^2-x-2=0$ មានឫស $x_1=-1, x_2=2$ ។

អនុគមន៍ f មានអតបតិបរមាធៀបត្រង់ $x=-1$ គឺ $f(-1) = \dfrac{(-1)^2+2}{2(-1)-1} = -1$

និងមានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ គឺ $f(2) = \dfrac{4+2}{4-1} = 2$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទទី១ តួទូទៅនៃស្វ៊ីតគឺ $u_n = \beta + \dfrac{(\beta-\alpha)\lambda}{(\mu)^{2^n}-\lambda}$ ដែល $\alpha=-1$; $\beta=2$

ហើយ $\lambda = \dfrac{a-p\alpha}{a-p\beta} = \dfrac{1-0}{1-0} = 1$ និង $\mu = \lambda\dfrac{u_0-\alpha}{u_0-\beta} = 1\times\dfrac{3+1}{3-2} = 4$

ដូចនេះ $u_n = 2 + \dfrac{(2+1)(1)}{(4)^{2^n}-1} = 2 + \dfrac{3}{2^{2^{n+1}}-1} = \dfrac{2^{2^{n+1}+1}+1}{2^{2^{n+1}}-1}$ ។

ឧទាហរណ៍៤

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n{}^2+1} \end{cases}$ ដែល $n = 0,1,2,3,.....$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យក $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ មានរាង $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$

ដែល $a=0, b=2, c=0, p=1, q=0, r=1$ ។

គេមាន $f'(x) = \dfrac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(-x^2+1)}{(x^2+1)^2}$

បើ $f'(x)=0$ នោះ $-x^2+1=0$ មានឫស $x_1=1, x_2=-1$ ។

អនុគមន៍ f មានអតបតិបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1)=\frac{2}{1+1}=1$ និងមានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=-1$ គឺ $f(-1)=\frac{-2}{1+1}=-1$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទទី១ តួទូទៅនៃស្វ៊ីតគឺ $u_n=\beta+\frac{(\beta-\alpha)\lambda}{(\mu)^{2^n}-\lambda}$ ដែល $\alpha=1\,;\,\beta=-1$

ហើយ $\lambda=\frac{a-p\alpha}{a-p\beta}=\frac{0-1}{0+1}=-1$ និង $\mu=\lambda\,\frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}=-1.\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{3}$

ដូចនេះ $u_n=-1+\frac{(-1-1)(-1)}{(\frac{1}{3})^{2^n}+1}=-1+\frac{2}{\frac{1}{3^{2^n}}+1}=\frac{3^{2^n}-1}{3^{2^n}+1}$ ។